# Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria

**Elena Fabiola Ruiz[1] y Jose Luis Lupiáñez[2]**

[1]Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.
[2]Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

**[1]México**

**[2]España**

*Elena Fabiola Ruiz Ledesma*. Av. Renacimiento No. 120 Edif 3 depto. 507. Col Ampliación Petrolera. Delegación azcapotzalco. 02710. México. E-mail: elen_fruiz@yahoo.com.mx

# Resumen

**Introducción**: El problema de investigación que se plantea en este artículo, consiste en revisar las estrategias que emplean los estudiantes de sexto grado de primaria, al resolver actividades de razón y proporción simple y directa, para reconocer los procesos cognitivos del pensamiento de los alumnos y poder determinar cómo estructuran sus respuestas ante situaciones problemáticas.

**Método**: En esta parte se describen los siguientes aspectos: El escenario donde tuvo lugar el estudio que fue una escuela pública en la ciudad de México, los sujetos con los que se trabajó que fueron 29 estudiantes que cursaban sexto grado de educación primaria, y los instrumentos metodológicos empleados: la observación directa en el aula, la observación indirecta a través de pláticas informales con el profesor del grupo y los estudiantes, así como la revisión de sus cuadernos y sus libros de texto; el diseño, validación, a través del piloteo y la aplicación de un cuestionario de naturaleza exploratoria

**Resultados**: En esta sección se presentan los resultados que se obtuvieron del cuestionario así como el tipo de estrategias que emplearon en cada tarea y se hace una comparación con algunas de las investigaciones que se mencionan en la parte de introducción.

**Discusión** o **Conclusión**: Se observó una fuerte carga sobre los algoritmos, pero carentes de significado. La enseñanza escolar no ha explotado al máximo el pensamiento cualitativo de los estudiantes en torno a la proporcionalidad, lo cual se observó cuando manifestaron que se centraban en una de las dimensiones de las figuras que se les pedía reducir o amplificar.
Se reconoció la familiaridad que muchos alumnos tenían con el dibujo a escala, cuando una parte del dibujo ya estaba hecha, por lo que se ha señalado el predominio de la "ley del cierre" que prevalece en ellos.

**Palabras Clave:** Razón, proporción, estrategias, pensamiento proporcional cualitativo, pensamiento proporcional cuantitativo

*Recibido:* 12/01/09 *Aceptación inicial:* 19/01/09 *Aceptación final:* 02/02/09

# Abstract

**Introduction**: The research problem in this paper consists in reviewing the strategies used by the students of sixth grade of primary school when solving simple and direct ratio and proportion problems to recognize the cognitive process of the way the students think and so to determine how they structure their answers facing problematic situation.

**Method**: In this part the following aspects are described: The place where the study took place was a public primary school in Mexico city, the subjects that we work with were 29 students studying the sixth grade of primary school, and the methodological instruments used, those were: The direct observation in the classroom, the indirect observation through informal talking with the teacher and the students, also as checking their text books, the design, validation, through tests and application of a exploratory questionnaire.

**Results**: In this section are shown the results that were gotten from the questionnaire and the kind of strategies used in each task then a comparison is made with some of the investigations that are mentioned in the introduction part.

**Discussion** or **Conclusion**: An strong charge over the algorithms was observed, but with out a meaning. The teaching has not explore at all the qualitative thinking of the students around proportionality, that was observed when they focus in one of the figures dimensions they were asked to reduce or amplify.

**Keywords:** Ratio, Proportion, strategies, proportional qualitative thinking, proportional quantitative thinking.

*Received:* 01/12/09 *Initial Acceptance:* 01/19/09 *Final Acceptance:* 02/02/09

## Introducción

Estudios como el de Guerrero, Gil y Blanco (2006), señalan que resulta necesario comprender y analizar cómo el estudiante al aprender matemáticas y al interactuar con su entorno, interioriza determinadas creencias, lo que genera éxito o fracaso hacia él como aprendiz. Pero también el éxito o fracaso de su aprendizaje tiene que ver con la forma en que el profesor lleve a cabo la enseñanza. Al respecto, Thurston, Grant y Topping (2006), señalan que los conocimientos débiles  y la poca confianza que tienen algunos profesores que imparten ciencias en la escuela primaria influyen en la manera en que el estudiante enfrente su aprendizaje. Tanto las creencias como la pobreza de conocimientos del profesor influyen en el aprendizaje del estudiante. Hay otros factores, como: procesos cognitivos, estrategias de solución, entre otros, que también constituyen obstáculos en el aprendizaje del estudiante y que se generalizan como psicopedagógicos.

Este artículo se enfoca a detectar obstáculos psicopedagógicos que presenta el estudiante de sexto grado de educación primaria (estudiantes de 11 y 12 años de edad), en particular en el tema de razón y proporción. Así, el problema de investigación que se plantea, consiste en revisar las estrategias que emplean los estudiantes de sexto grado de primaria, al resolver problemas de razón y proporción simple y directa, para reconocer los procesos cognitivos del pensamiento de los alumnos y poder determinar cómo estructuran sus respuestas ante situaciones problemáticas.

Para el reconocimiento de los procesos cognitivos del pensamiento de los estudiantes de la investigación, es fundamental revisar las estrategias usadas por ellos, porque permiten recuperar ciertos pasajes del pensamiento que desarrollan al enfrentar tareas de razón y proporción y porque exhiben una gran diversidad de sus recursos, así como diferentes modos de representación, como el de la tabla, el del dibujo y el numérico (Gueudet, 2007).

*Justificación*

A nivel curricular hay temas que se introducen desde la Educación básica o primaria y el éxito obtenido en su aprendizaje permite al estudiante avanzar en la comprensión de conceptos con los que trabajará en los siguientes niveles educativos. Este es el caso de los tópicos de razón y proporción, cuya enseñanza y aprendizaje se inicia en la primaria y constituyen el cimiento para la adquisición de conceptos fundamentales (Clark, Berenson y Cavey, 2003; Ruiz, 2002; Ruiz, Lupiáñez y Valdemoros, 2002).

Por otra parte, la incomprensión de los tópicos de razón y proporción contribuyen al mal empleo de conocimientos de la aritmética escolar, como manejo de problemas multiplicativos, además de que delimita y distorsiona conceptos que se abordan en secundaria y en el nivel medio superior, como el estudio de funciones.

A continuación nos centraremos en varios trabajos que estudian aspectos cognitivos relativos al aprendizaje de los conceptos de razón y proporción y al pensamiento proporcional, que nos permitirán interpretar los resultados de nuestra investigación. En primer lugar nos centraremos en los aportes de Jean Piaget, que sentaron bases sobre este tema que sigue siendo objeto de análisis, y en segundo nos centraremos en investigaciones que rastrean los procesos cognitivos a partir de las estrategias de resolución de escolares enfrentados a tareas sobre razón y proporción.

*Piaget y las raíces cualitativas del pensamiento proporcional*

Piaget (1978) concentró su trabajo en el pensamiento del sujeto, a través de sus expresiones y de los ámbitos desde los cuales las operaciones intelectuales se explican. Para determinar cuándo y cómo se constituyen esas operaciones intelectuales, Piaget (1978) recurrió a una combinación de dos métodos: la *resolución de problemas* y la *formación de conceptos*. Hizo un seguimiento de las etapas del desarrollo intelectual, hasta llegar a la de las *operaciones formales*, lo que le condujo a entender los fundamentos que él encontró en el tratamiento específico de los temas de razón y proporción.

Piaget e Inhelder (1978a) señalan que en el estudio de la evolución del pensamiento del niño, con frecuencia encontraron el problema de cómo llegan a ser entendidas las proporciones. En el caso de la velocidad, esta idea se observa en el momento en que dos movimientos sucesivos tienen que ser comparados sobre dos diferentes tiempos y distancias, decir por ejemplo, 5 cm en 1 segundo y 10 cm en 2 segundos. De manera similar, con el juicio de los niños en el caso de la probabilidad, la idea de proporción está directamente implicada, al decir, por ejemplo, 2 casos favorables de un total de 4 casos, como 3 casos favorables de un total de 6 casos. Ambas situaciones no aparecen completamente desarrolladas hasta el nivel de las operaciones formales, pero más tempranamente sí se puede observar que hay proporción en casos más simples, como situaciones que en su laboratorio se abordan a través de la balanza, los vasos comunicantes, las varillas flexionadas, entre otros.

Piaget e Inhelder (1978b), señalan que el sujeto puede construir el esquema de proporcionalidad cualitativa cuando comprende que un incremento en una variable independiente da el mismo resultado que un decremento en la variable dependiente. Es decir, cuando comprende que requiere de un elemento de compensación. Piaget (1978), a través de sus experimentos realizados, señala que *el niño adquiere la identidad cualitativa antes que la conservación cuantitativa* y hace una distinción entre comparaciones cualitativas y la verdadera cuantificación. En efecto, para Piaget la noción de proporción empieza siempre de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente.

Piaget e Inhelder (1978a), sostienen que entre los 11 y los 12 años, se ve en el sujeto la presencia de la noción de las proporciones en diferentes ámbitos, tales como: las proporciones espaciales (figuras semejantes), las relaciones entre pesos y longitudes de los brazos en la balanza, o en el cálculo de probabilidades. En el caso de la balanza de barra, el sujeto puede comprender, mediante la manipulación del dispositivo, que es posible conservar el equilibrio teniendo dos pesos iguales a las mismas distancias del centro, pero también se conserva el equilibrio disminuyendo un peso, pero alejándolo y aumentando el otro, aunque aproximándolo al centro. La comprensión de esta proporcionalidad (tanto directa como inversa), se da en primer lugar por vía cualitativa: “es lo mismo aumentar el peso que la distancia” luego en formas métricas simples: “disminuir el peso aumentando la longitud equivale a aumentar el peso disminuyendo la longitud”.

Piaget (1978), describió el avance en el razonamiento que aparece en tanto el niño se aproxima a la adolescencia, como *razonamiento formal* y sus características fueron diferentes a las que especificó como *razonamiento concreto*. Piaget siempre aceptó una lógica de lo concreto, que se ubica en la etapa de las operaciones concretas. El razonamiento proporcional, junto con la habilidad de formular hipótesis y trabajar con un cierto número de variables es indicativo de que el estudiante se encuentra en la etapa del razonamiento formal y que es cuando el sujeto tiene que reflexionar y hacer abstracciones para entender a las razones como relaciones entre cantidades y vincularlas a otras razones. La solución plena de un problema que involucra proporciones exhibe el razonamiento formal, mientras que una solución incompleta muestra el nivel del razonamiento concreto.

*Desarrollo cognitivo de los estudiantes y estrategias en la resolución de problemas*

Karplus, Pulos y Stage (1983), fueron unos de los primeros investigadores que categorizaron las respuestas de los niños, no como indicadores de una etapa general de razonamiento, sino como demostrativas de un nivel de comprensión de la proporción. Estos autores sostienen, que el razonamiento aditivo no subyace en una secuencia invariante de desarrollo, sino que está fuertemente influenciada por la instrucción y representa un esfuerzo de los estudiantes para abordar una tarea de un modo adecuado, más que de una manera sistemática.

Por otro lado, Markovits, Hershkowits y Bruckheimer (1986) analizan problemas de valor perdido y problemas de comparación[1], y concluyen que una de las razones por las que los escolares resuelven erróneamente estos problemas es el uso de la regla de tres no respaldado en la comprensión. Nesher y Sukenik (1989), por su parte, señalan que uno de los errores dominantes en las estrategias usadas por niños de diferentes edades, es la estrategia aditiva, en donde la relación de las razones es vista como la diferencia entre términos, en lugar de comprender que es de carácter multiplicativo.

Hart (1988), tras analizar los métodos usados por estudiantes de la secundaria al resolver problemas de razón y proporción, encontró que la mayoría de los estudiantes consideró difícil el resolver este tipo de problemas, y un gran número de estudiantes usaron métodos aditivos sin la implementación de la multiplicación y eludiendo el uso de fracciones. Hart comenta que a menudo los problemas de proporción requieren el reconocimiento de un factor escalar fraccional, seguido de una multiplicación por el factor, por lo que considera que la comprensión de las fracciones y las proporciones están vinculadas.

Hart destaca la gran importancia que tiene el desarrollo del pensamiento proporcional en los terrenos de la enseñanza y del aprendizaje, como una forma de evaluación de ellos. Para esta autora, algunos niveles de generalización como: manejo de razones, modos de generar equivalencias, entre otros, se dan cuando las estrategias multiplicativas son usadas. Y en

[1]Esta clasificación la retomaron de trabajos previos en donde se definen a los Problemas de valor perdido como aquellos en donde aparecen 3 números; a,b y c y la tarea consiste en encontrar el cuarto valor “x”, tal que a/b=c/x. Los problemas de comparación son aquéllos que presentan 4 números; a,b,c y d y la tarea es determinar si hay una relación proporcional entre ellos.

relación a esto, le presta mucha atención al hecho de que si en la enseñanza se empieza por lo aditivo, se pueden generar dificultades que repercuten en la maduración que el sujeto pudiera llegar a presentar para la utilización de la multiplicación como antecedente de la equivalencia.

Freudenthal (1983) designa a las razones como entidades numéricas vinculadas a las proporciones y hace referencia al estatuto lógico de razón como una función de pares ordenados de números o valores de magnitud, marco en el que tienen una relación de equivalencia. Para Freudenthal, en la enseñanza es preciso tomar en cuenta a las razones internas y a las razones externas, definiendo a las primeras como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud y a las segundas, como relaciones entre valores de diferentes magnitudes.

Finalmente destacamos los trabajos de Streefland (1984a y 1984b) quién realiza una investigación poniendo énfasis en que la enseñanza temprana de razón y proporción debe partir de niveles cualitativos de reconocimiento de éstas y hace uso de recursos didácticos que favorecen el desarrollo de patrones perceptuales, en apoyo a los correspondientes procesos de cuantificación.

Lo original del trabajo de Streefland es que a través de una historia, titulada *"Con las miradas del Gigante"*, establece comparaciones entre el mundo del gigante con el mundo del ser humano, para fundar relaciones que conduzcan a la noción de razón. A medida que va evolucionando el razonamiento cualitativo, lo que ocurre es que hay un avance en el pensamiento y el niño puede llegar a incorporar más elementos para un análisis que le permita considerar distintos factores conjuntamente.

Coincidiendo con Piaget (1978), Streefland sostiene que lo cualitativo emerge antes que lo cuantitativo, pero además lo lleva al terreno de la enseñanza y esa aportación es la que utilizamos en esta investigación, ya que, en primer lugar, interesa tener un conocimiento de cómo los estudiantes que culminan la Educación Primaria organizan los componentes cualitativos. (Ruiz y Valdemoros, 2004).

## Método

### *Participantes*

El estudio tuvo lugar en un escenario natural, con un grupo de sexto grado de Educación Primaria perteneciente a una escuela de la Secretaría de Educación Pública, de turno matutino, la cual estaba inserta en una comunidad que contaba con la mayoría de los servicios de urbanización y fue elegida porque presentaba rasgos comunes a un amplio espectro de escuelas urbanas. Está ubicada en una zona de la ciudad de México, dinámica y en continuo crecimiento pero de un estatus socioeconómico bajo.

El grupo del estudio estuvo integrado por veintinueve estudiantes, quienes estaban culminando la educación primaria. Su trabajo escolar estaba basado en el Programa oficial de la Secretaría de Educación Pública (2001a), lo que equivale en otros países al Ministerio de Educación y Ciencia. Los alumnos tenían once años de edad y eran niños poco participativos.

Como lo que se planteó como problema es la indagación de algunos procesos cognitivos de los alumnos (pensamientos, estrategias de solución, información perceptual, lenguaje, registros semióticos, entre otros), ésta fue realizada a través de las observaciones directas e indirectas así como el análisis cualitativo como cuantitativo de un cuestionario.

### *Instrumentos*

Los instrumentos metodológicos empleados fueron: la observación directa en el aula, la observación indirecta a través de conversaciones informales con el profesor del grupo y los estudiantes, así como la revisión de sus cuadernos y sus libros de texto, y la aplicación de un cuestionario de naturaleza exploratoria que tuvo una versión previa que se empleó como estudio piloto.

La observación permitió ver el tipo de problemas que el estudiante resuelve, ya sea los propuestos en un libro de texto (Secretaría de Educación Pública, 2001b) como los propuestos por la profesora del grupo y la forma en que trabajan. De esta observación se concluye que el planteamiento de diversas situaciones se entiende a la luz de la diversificación de los problemas, quedando empobrecidas muchas estrategias de solución, ya que son situaciones impuestas. Asimismo, se observó una fuerte carga sobre los algoritmos, pero carentes de significado.

*Procedimiento*

Las tareas sobre razón y proporción que se diseñaron para el cuestionario se seleccionaron atendiendo a diferentes criterios (Misallidov, 2003). Algunas tareas se refieren a problemas muy elementales de variación proporcional, mientras que otras pretenden ver el reconocimiento cualitativo y cuantitativo de las relaciones proporcionales entre cantidades que el estudiante pueda establecer y que en la observación pareciera que su establecimiento fue mecánico, tal y como la profesora lo hacía. De manera general, los objetivos del cuestionario fueron los siguientes:

1. Determinar el estado en que se encuentra el sujeto en torno a la organización que tienen los componentes cualitativos y procesos de cuantificación de las relaciones proporcionales.
2. Realizar una indagación profunda que permita mostrar tanto lo que el estudiante exhibe como lo que deja insinuado.
3. Recuperar la secuencia del pensamiento del estudiante.
4. Evidenciar la manera como el estudiante se acerca a la solución de los problemas planteados, tanto las estrategias que utiliza en la resolución como los modos de representación con los que trabaja.

El cuestionario se dividió en dos bloques. En el primero, integrado por cinco tareas, se buscó que emergieran justificaciones más apoyadas en la apreciación cualitativa, ya que interesó ver cómo cualitativamente se construye el pensamiento, prescindiendo de cantidades explícitas asociadas a las relaciones de proporcionalidad dadas. En tres de las tareas se utilizó la cuadrícula, con la finalidad de favorecer la realización de un tránsito a la cuantificación. El segundo bloque incluyó tareas de razón y proporción cuantificadas, ya que se daban algunos valores y se les demandaban nuevos valores. En algunas de estas tareas se utilizó la tabla, como un modo de representación para el reconocimiento de razones externas o internas.

La Tabla 1 sintetiza el objetivo específico de cada bloque y los de las tareas que conformaban cada bloque.

**Tabla 1.** ***Objetivos de los bloques y de las tareas del cuestionario inicial***

| Bloque I | Bloque II |
|---|---|
| *Objetivo específico de cada bloque* | |
| Indagar tanto los conocimientos como el saber matemático que tiene el estudiante sobre los componentes cualitativos y aspectos elementales de lo cuantitativo, en las relaciones proporcionales. | Indagar cómo el estudiante está procesando su pensamiento en torno a la cuantificación de las relaciones proporcionales. |
| *Objetivo específico de cada tarea* | |
| 1. Indagar si el estudiante puede reconocer la reducción de un dibujo en todos sus componentes, de tal manera que pueda expresar si se conserva la forma original del dibujo, con base en discriminaciones visuales.<br><br>2. Indagar si el estudiante reconoce visualmente la razón en la que se encuentran las dimensiones de los rectángulos y si el niño puede dibujar los faltantes, apoyándose en el reconocimiento que hizo.<br><br>3. Indagar si el estudiante puede reproducir una figura a una escala dada (se solicitó que el dibujo que reprodujera fuera linealmente el doble del original).<br><br>4. Indagar si el estudiante puede completar una figura, que es la reducción de la original, de tal manera que preserve la proporcionalidad o que conserve la forma de la figura original, indagar qué estrategia se valió y qué modo de representación usó al realizar la tarea.<br><br>5. Indagar si el estudiante puede completar la ampliación de una figura preservando la proporcionalidad y que explique por escrito cómo lo hizo. | 6a. Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica, conociendo el valor del segmento que representa al ancho de ella y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estuvo inmersa en una relación de semejanza. Revisar si relaciona magnitudes de una misma escala (razones internas).<br><br>6b. Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica, conociendo el valor del segmento que representa al ancho de ella y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estuvo inmersa en una relación de semejanza. Revisar si relaciona magnitudes de escalas diferentes (razones externas).<br><br>7 (a y b). Determinar las cantidades que corresponden a los datos dados en tabla que son el resultado de una situación planteada. Revisar la estrategia empleada en su llenado y si se estableció una relación entre las preguntas formuladas y la tabla.<br><br>8. Dada una tarea ilustrada a través de dibujos (botes de pintura), completar los datos desconocidos dados tres valores y revisar la estrategia usada.<br><br>9. Determinar el valor desconocido de un problema, apoyado en el modelo de la compra de objetos conocidos por el estudiante (bolsas de dulce), dados 3 datos. Revisar qué estrategia emplea.<br><br>10 (a y b). Indagar si el estudiante puede inventar un problema relacionado con tres cantidades dadas en una tabla. Revisar si puede llenarla y resolver el problema que él haya planteado. |

*Sobre el piloteo del cuestionario inicial*

El piloteo del cuestionario sirvió para varias metas de ajuste:

1. Asegurar la legibilidad de la comprensión de las tareas.
2. Revisar los grados de dificultad, ya que ninguno de los extremos era deseable (muy fácil o muy difícil).
3. Para tener el reconocimiento de aquellos aspectos que se pueden considerar como más universales.

Después de una primera aplicación piloto del cuestionario, se observó que las tareas que lo integran embonaron con la relación que los estudiantes han establecido con su maestro y el programa de estudios. Las tareas no fueron resueltas en su totalidad por algunos estudiantes, pero se observó que no hubo niños que se perdieran totalmente o que no supieran qué hacer.

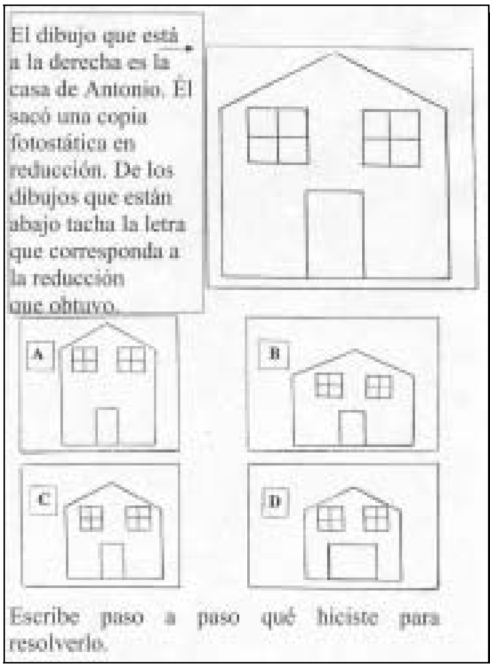
El piloteo también permitió reconocer globalmente que toda la información dada en base a dibujos favoreció su comprensión en los estudiantes, por lo que se presume que hay ciertos antecedentes, en grados escolares previos, trabajados en esa dirección (a nivel del dibujo a escala).

Como consecuencia de los resultados obtenidos del piloteo del cuestionario, se hicieron ajustes al planteamiento de las tareas, yendo en esta reestructuración más allá de la relación establecida por los sujetos con la institución escolar, de modo que se pudiera permitir la evocación de las experiencias cotidianas o frecuentes de los sujetos.

Otro de los ajustes que se le hizo al cuestionario fue el balancear algunas tareas en cuanto a la forma en que se mostraba la información, pues se buscó no distraer a los estudiantes con información superficial y, por otra parte, aquellos problemas muy cargados con datos escritos, se modificaron de tal forma que se sustituyó una parte de ellos con dibujos.

También se cambió un poco la terminología usada en las instrucciones de algunos problemas, ya que al parecer ésta fue una causa de dificultad. Se agregó una tarea con la finalidad de reconocer con qué está más familiarizado el estudiante, en cuanto a razones internas y externas se refiere, en base a la distinción que Freudenthal (1983) realiza, al resolver una situación que requiere del establecimiento de relaciones entre las magnitudes que se le presentan.

A continuación se muestran las tareas que integraron el cuestionario inicial, con las modificaciones efectuadas después del piloteo. Las dos primeras exploraron los aspectos cualitativos en el terreno de la proporcionalidad.



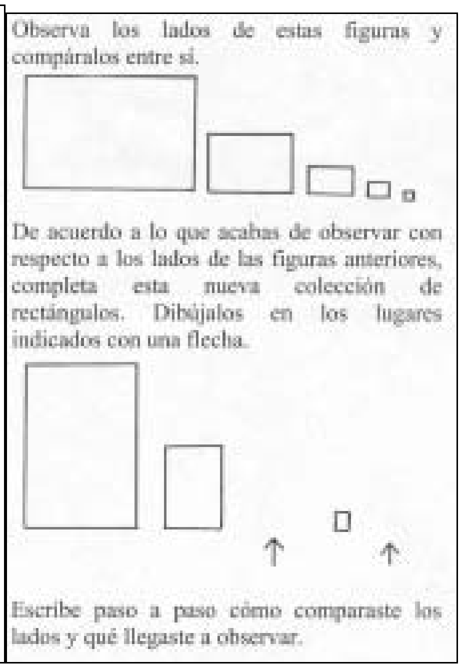
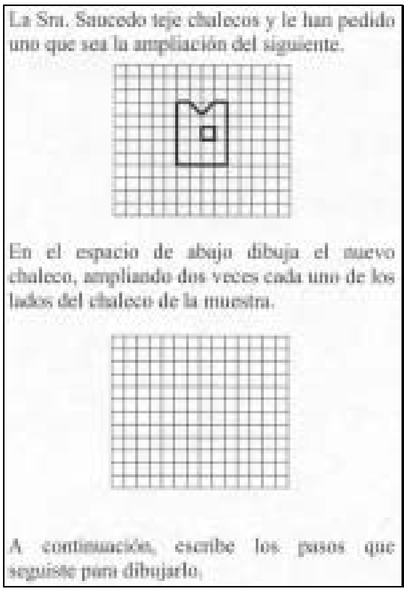
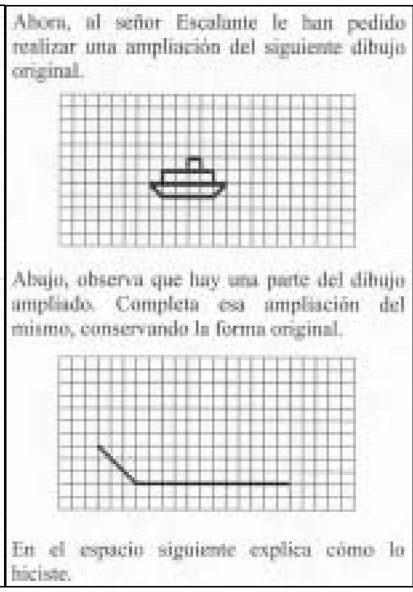




***Figura 1*. Tarea 1** ***Figura 2*. Tarea 2**

Las tres siguientes estuvieron enfocadas al tránsito del pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo:



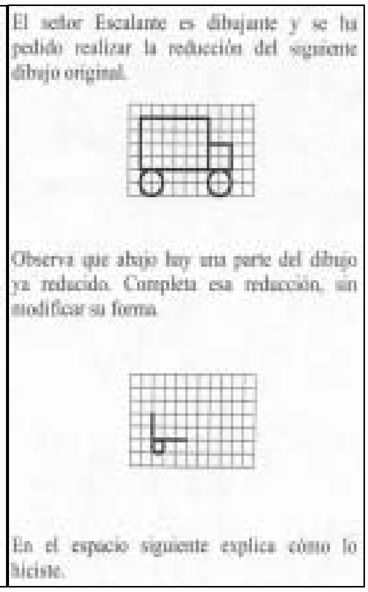
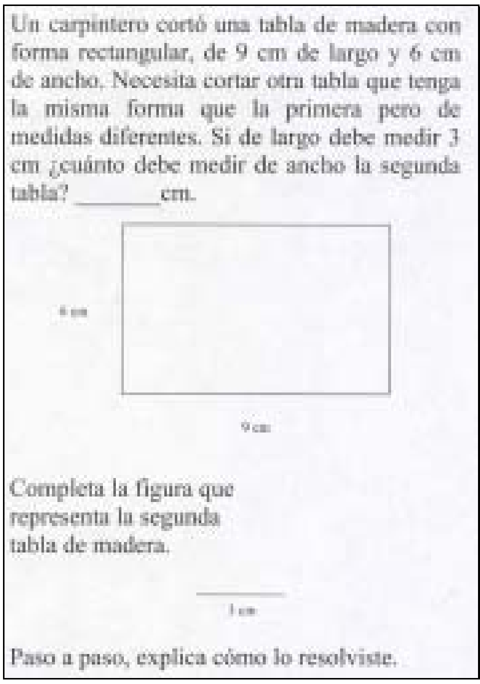




***Figura 3*. Tarea 3** ***Figura 4*. Tarea 4** ***Figura 5*. Tarea 5**

Las ocho tareas restantes del cuestionario se centraron en el campo cuantitativo del pensamiento proporcional del estudiante.

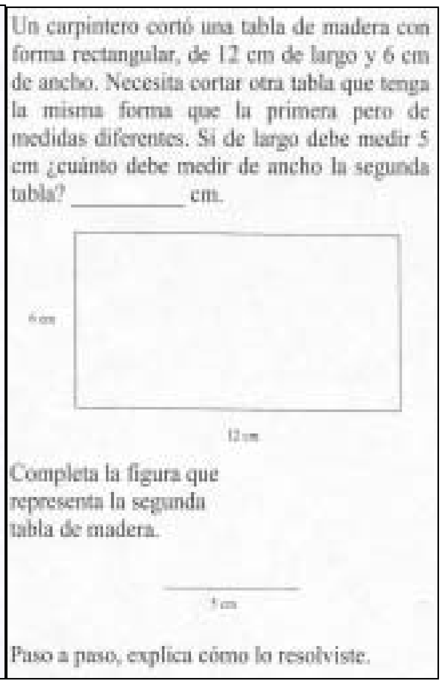


Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 9 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma que la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 3 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla? _______cm.



Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.

Paso a paso, explica cómo lo resolviste.



Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 12 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma que la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 5 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla? _________ cm.

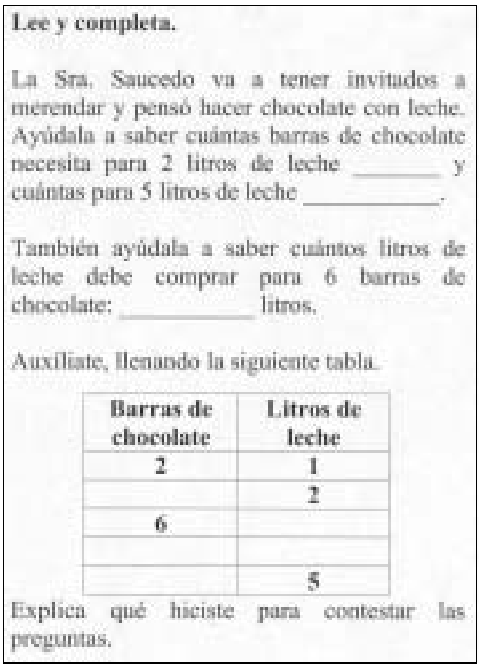


Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.

Paso a paso, explica cómo lo resolviste.

***Figura 6*. Tarea 6ª**

***Figura 7*. Tarea 6b**



**Lee y completa.**

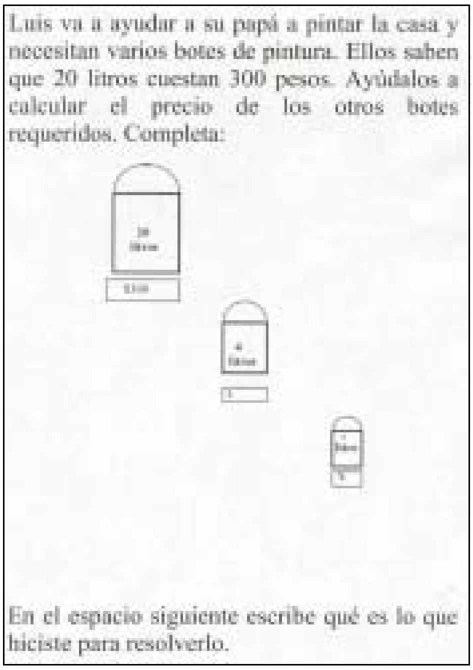
La Sra. Saucedo va a tener invitados a merendar y pensó hacer chocolate con leche. Ayúdala a saber cuántas barras de chocolate necesita para 2 litros de leche _______ y cuántas para 5 litros de leche ___________.

También ayúdala a saber cuántos litros de leche debe comprar para 6 barras de chocolate: ___________ litros.

Auxíliate, llenando la siguiente tabla.

| Barras de chocolate | Litros de leche |
|---|---|
| 2 | 1 |
| | 2 |
| 6 | |
| | |
| | 5 |

Explica qué hiciste para contestar las preguntas.



Luis va a ayudar a su papá a pintar la casa y necesitan varios botes de pintura. Ellos saben que 20 litros cuestan 300 pesos. Ayúdalos a calcular el precio de los otros botes requeridos. Completa:

En el espacio siguiente escribe qué es lo que hiciste para resolverlo.

***Figura 8*. Tareas 7a y 7b**

***Figura 9*. Tarea 8**

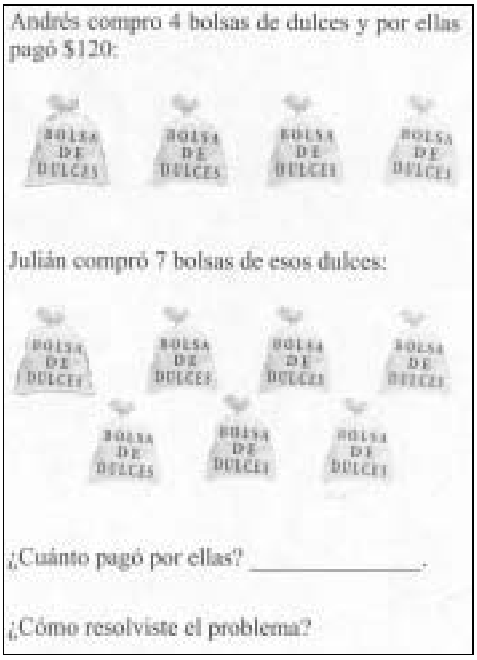



*Figura 10*. **Tarea 9**

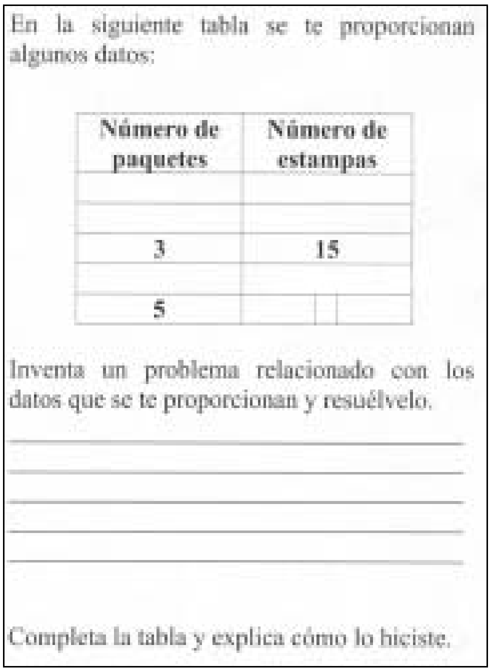



*Figura 11*. **Tareas 10a y 10b**

## Resultados

A nivel global, de los veintinueve estudiantes que realizaron el cuestionario, veintiséis de ellos resolvieron todas las tareas del cuestionario, y los tres restantes dejaron sin contestar entre una y tres actividades. Doce de los veintinueve contestaron correctamente más de la mitad de las tareas, pero ninguno resolvió correctamente las treces tareas que componían el cuestionario. Un estudiante logró resolver doce de ellas, y también uno sólo pudo responder correctamente a una de ellas.

Finalmente, dos de las trece tareas se consideraron como las más accesibles para los estudiantes ya que fueron resueltas correctamente por casi la totalidad del grupo (veintisiete y veintiséis alumnos) y corresponden a las actividades 7b y 10a, respectivamente. A continuación, describimos con más detalle las respuestas a cada una de las tareas propuestas.

### *Análisis de la Tarea 1*

La mitad del grupo eligió en forma correcta la casa reducida, los argumentos dados para la selección fueron: *"es la más parecida"*, *"es igual pero más pequeña"*, *"no se le quitó,* *ni se le aumentó nada”*, *“viendo todas y comparando”* (este último caso fue por discriminación visual).

La otra mitad del grupo eligió la casa incorrecta, en su mayoría fue aquella cuya reducción del ancho no corresponde a la mitad como en todo lo demás, y es la que tiene la letra (B). En general los estudiantes que la seleccionaron comentaron que fue porque es muy parecida a la original. Se observa que estos alumnos no se fijaron en todas las partes de la casa, al platicar con ellos mencionaron que solamente la reducción es aquello más pequeño a una figura dada, pero en ningún momento dijeron algo que indicara el hecho de tomar en cuenta que todas las partes que integran la figura deben tener el mismo tamaño.

Se pudo observar que varios niños sólo se centraron en una de las dimensiones, al parecer el proceso de centrar está muy arraigado en ellos y justamente este es un obstáculo psicopedagógico que impide al estudiante resolver correctamente situaciones de razón y proporción.

Los argumentos que dieron se clasificaron en dos categorías: una de ellas correspondió a aquellos alumnos que eligieron a la casa reducida basándose en la definición que ellos tenían de reducción *“es igual pero más pequeña”* o *“no se le quitó, ni se le aumentó nada”*. En la segunda categoría quedó el argumento *“es la más parecida”* y fue empleada tanto por alumnos que seleccionaron la casa “C” como la que no estaba reducida. Esto indica que el término “parecida” no refleja en todos los casos la idea de proporción. Así mismo muestra la necesidad de profundizar más en el terreno cualitativo de la proporcionalidad y de que los niños deben avanzar de la fase de significación a la de designación dentro de la Enseñanza, es decir, que una vez comprendido el significado real de lo abordado, puedan rebautizar o dar el nombre que en el lenguaje matemático es empleado.

*Resultados de la Tarea 2*

Se mostró una sucesión de rectángulos, cuyas dimensiones correspondían a la mitad del precedente y se les solicitó a los alumnos completar una segunda sucesión, para lo cual debían darse cuenta de que los rectángulos que dibujaran tenían que reducirlos a la mitad, tanto de largo como de ancho. Se pretendía indagar si los estudiantes reconocían visualmente la relación (razón) en la que se encontraban las dimensiones de los rectángulos (los largos entre sí o los anchos entre sí, que de acuerdo con Freudenthal (1983) serían las razones internas y externas). También revisar si podían dibujar los rectángulos faltantes apoyándose en el reconocimiento que hicieran. Asimismo importaba ver si empleaban el operador ½ y de qué forma lo hacían.

En esta actividad no se manejaron valores explícitos, por lo que se ubicó en el terreno cualitativo y en el transitorio entre lo cualitativo y lo cuantitativo.

Se encontró que la mayoría de los estudiantes observó que la sucesión a completar era similar a la dada sólo había cambiado la posición. A pesar de ello, muy pocos (ocho de veintinueve niños) redujeron las figuras a la mitad en ambas dimensiones, para lo cual no utilizaron algún instrumento de medida, sino que hicieron los dibujos de una manera aproximada, lo cual correspondió a lo que se demandaba en esta tarea, pues no se pedía usar instrumento alguno. El problema detectado, del cual ya se ha hecho mención, fue que la mayor parte del grupo hicieron la reducción en una sola de las dimensiones de los rectángulos.

En general los alumnos se percataron que los rectángulos a realizar deberían ser más pequeños que los precedentes, pero no descubrieron en qué proporción estaban reducidos, es decir no se dieron cuenta del patrón utilizado en la reducción de los rectángulos que componían la sucesión. Además, les resulta más fácil completar una figura, de la cual se les da una parte, como es el caso de las tareas en las que se les proporcionaban dibujos en una cuadrícula, que hacer un dibujo mediante el previo reconocimiento del patrón correspondiente.

Hubo comparación ubicada en el terreno cualitativo por las frases verbales usadas como "*deben ser más chicos cada vez*", entre otras. Emplearon como recurso lo visual y lo intuitivo, ya que no midieron haciendo uso de algún instrumento, pero la dificultad de la mayoría fue la centración en una de las dimensiones, que es el mismo obstáculo psicopedagógico encontrado en la tarea 1.

*Resultados de la Tarea 3*

Con esta tarea se pretendió revisar la noción de ampliación, el uso del operador natural (x2) a través del dibujo y el posible reconocimiento de la razón implicada. Fue una de las tareas menos accesibles para los estudiantes, ya que muy pocos llegaron a la obtención correcta de la actividad. En ella tenían que amplificar linealmente, al doble, un dibujo dado, apoyándose en una cuadrícula. Las estrategias empleadas fueron: sumar dos veces la misma cantidad de cuadros, después de haber realizado un conteo de ellos, en una dimensión o en las dos; multiplicar por dos la cantidad de cuadritos de uno o dos lados. Pero hubo dos errores más comunes, uno de ellos fue el duplicar un sólo lado de la figura, por cualquiera de las dos vías, sumar el doble o multiplicar por dos, (ver Figura 12). El segundo error más común fue el sumar dos cuadritos. Por lo que estos alumnos usan la llamada "estrategia aditiva" incorrecta que menciona Hart (1988). Este es otro obstáculo psicopedagógico que presentan los alumnos.

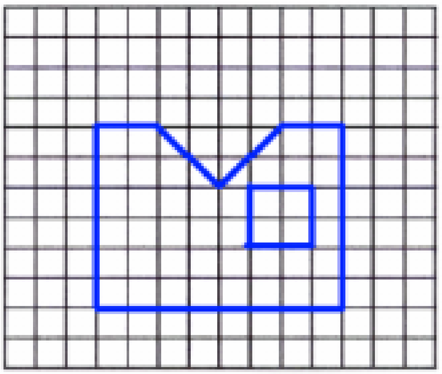


***Figura 12*. Resolución de Víctor de la Tarea 3**

Además del dibujo, Víctor explicó su respuesta diciendo: "Yo lo hice aumentando dos veces cada cuadrito". Puede observarse que la amplificación se aplicó sólo para una dimensión, en este caso el ancho[2]. Está resolución se consideró incorrecta. También se puede ver que la cuadrícula fue un medio de apoyo para el conteo de los cuadros, independientemente de que la cantidad que aumentaron no fue la correcta.

En general no hubo una interpretación adecuada del texto, pues predominó el término ampliación (aunque en la mayoría de los casos el significado que de él tenían los alumnos era erróneo) y al parecer no se fijaron en que la ampliación debía de ser al doble en cada uno de los lados del chaleco dado. Al platicar con algunos estudiantes se observaron varias cosas: una de ellas agrupa a aquellos estudiantes que no tenían clara la noción de proporción, desde el punto de vista del dibujo a escala, ya que en sus respuestas sólo mencionaron que ampliar algo es *"hacerlo más grande"*. Se encontraron dibujos de chalecos en donde la cantidad de cuadros que aumentaron indica la no comprensión de la proporción. Al parecer muchos alumnos confundieron la expresión dada en el texto con aumentar dos cuadros en cada lado. Otro

[2] Al trabajar con las tareas que se apoyaban en la cuadrícula, la medida se expresa como el conteo de pequeños segmentos que corresponden a los lados de los cuadrados que han sido marcados en la cuadrícula. Los niños dicen que cuentan cuadros y en lo sucesivo, así describiremos sus acciones.

subgrupo de alumnos se caracterizó porque duplicaron la cantidad de cuadros en una sola dimensión, y en el tercer grupo de niños están aquellos que mostraron tener clara la noción de proporción desde el punto de vista de la idea del dibujo a escala, pues dibujaron un chaleco teniendo el doble de cuadritos en cada dimensión.

*Análisis de la Tarea 4*

Al parecer dibujar una figura, en este caso ampliándola de otra dada, les resulta más difícil que completar una cuando ya se les proporciona una parte dibujada de ella. En esta actividad también se utilizó la cuadrícula como un medio de apoyo para amplificar una figura, dibujada una parte de ésta. Se observó que todos los estudiantes pudieron completar correctamente la parte de abajo del barco, pero no amplificaron al triple (linealmente) las dos siguientes partes que lo componen, con lo que se puede observar que estaba presente la propiedad del cierre que menciona Piaget. Les fue difícil trabajar con el operador natural (x3) a través del dibujo. La mayoría del grupo (veinticuatro de veintinueve) no percibieron que la parte que completaron era el triple de la figura original y cayeron en el error de duplicar en lugar de triplicar linealmente, los dos componentes restantes del barco.

*Análisis de la Tarea 5*

Se pretendió indagar si el estudiante podía completar una figura, que es la reducción de la original, de tal manera que preservara la proporcionalidad o conservara la forma de la figura original. También se analizó cómo ayudaba al estudiante tanto la cuadrícula, como una parte de la figura dibujada al solicitarle hacer la reducción de la mitad de los segmentos de la figura dada.

La mitad del total del grupo realizó correctamente esta actividad, en su mayoría se fijó en la parte dibujada y completó correctamente pero, también los estudiantes observaron que la parte hecha del camioncito correspondía a la mitad de cuadritos tanto de largo como de ancho con respecto al original lo cual se afirma por las explicaciones, que por escrito, dieron los alumnos.

Al parecer los estudiantes estaban más familiarizados para trabajar, ya sea duplicando u obteniendo a la mitad, con algunos números como lo son el 4 y el 6, porque en este caso se percataron que la parte dibujada del camión correspondía a la mitad de cuatro cuadritos, en cuanto a su ancho y a la mitad de seis cuadros en su largo. También se observó esta forma de proceder en la Tarea 3, en donde la mayoría duplicó el ancho del chaleco, que correspondía a cuatro cuadritos. En esta tarea, tanto la cuadrícula como la parte ya dibujada, fueron medios que les ayudaron a los estudiantes a resolverla con éxito.

En ninguna de las tareas mencionadas, desde la tres a la cinco, hubo reconocimiento explícito de las razones implicadas; ya que no manejaron fracciones o expresiones que pudieran señalar la relación entre los largos de las figuras, como en el caso del chaleco, el barco o el camioncito, ni en la sucesión de rectángulos dada, por lo que se puede decir que, el no poder reconocer relaciones entre magnitudes al compararlas mediante un cociente, de forma cualitativa, es un obstáculo psicopedagógico, por ello cuando trabajan en el terreno cuantitativo no logran establecer esas relaciones o también llamadas razones

Este primer bloque de tareas revisó lo concerniente a dos nociones importantes que son las de *reducción y ampliación*, vistas a través de la idea de la fotocopiadora y del dibujo a escala. Se hace hincapié en que se partió de esto porque son ideas preliminares de la proporcionalidad, como es señalado en los estándares de la NCTM (2003) en donde se expone que la proporción se puede iniciar trabajando con niños pequeños a través de la construcción de figuras más pequeñas o más grandes en relación a una dada. Además por lo señalado en la introducción de este artículo (Piaget e Inhelder, 1978a y b), en donde se comenta lo referente a que el niño adquiere la identidad cualitativa antes que la conservación cuantitativa, y por su reafirmación en las tesis de Streefland (1984a y b).

*Análisis de la Tarea 6 (apartados a y b)*

Con estas tareas se pretendió revisar las relaciones entre dos magnitudes que el estudiante podía establecer, ya sea entre dos dimensiones del mismo tipo (largos entre sí) o entre dimensiones diferentes de una misma figura (largo y ancho), es decir ver qué les resultaba más fácil, trabajar con razones internas o externas, como Freudhental las denomina. Esto fue a través de completar una figura, conociendo los valores del ancho y largo de un rectángulo y el valor del segmento que representa al ancho o el largo de otro rectángulo que debía ser proporcional. También se pretendía indagar si el operador era un instrumento para componer las razones en las que se encontraban las dimensiones de los rectángulos (los largos entre sí o los anchos entre sí).

En ambas tareas, el valor conocido de los rectángulos que se pedían que fueran proporcionales, correspondía al ancho. En el caso de la actividad 6a medía la tercera parte del ancho del otro rectángulo. La resolución de este problema tuvo un alto grado de dificultad para los alumnos, ya que sólo siete de veintinueve estudiantes llegaron a una respuesta correcta. Ellos compararon los valores de los largos de los rectángulos y se dieron cuenta que una de esas medidas cabía tres veces en la otra, algunos escribieron: “el 3 cabe 3 veces en el 9” y debían encontrar un número que cupiera tres veces en el seis, que es la medida del largo. Todos los alumnos hicieron operaciones, pero los veintidós niños, cuyo resultado fue erróneo, se debió a que establecieron una relación inadecuada, algunos consideraron que el largo debía ser la mitad del valor del ancho del rectángulo, otros alumnos se fijaron sólo en los números, sin importar que unos correspondían a los largos y otros a los anchos de las figuras, como se puede ver en la Figura 13, en donde Ana Belén explicó que “el 6 no cabe en el 9, pero el 3 cabe dos veces en el 6, entonces la respuesta es 3”.

El establecer relaciones incorrectas, como comparar el largo de una figura con el ancho de otra, representa otro obstáculo psicopedagógico, ya que no han logrado comprender que una razón se establece al comparar por cociente dos magnitudes, pero esa comparación debe de ser entre dimensiones homólogas de dos figuras, por ejemplo: el largo de una figura con el largo de otra, el ancho de una figura con el ancho de otra, o las dos dimensiones de la misma figura, es decir el largo y el ancho de una misma figura; que es lo que llama Freudenthal (1983) razones externas y razones internas.

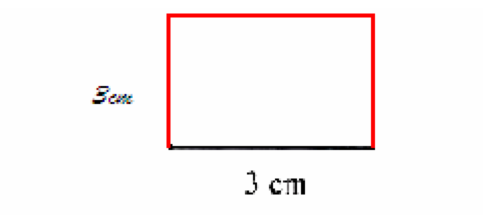



***Figura 13*. Resolución de Ana Belén a la Tarea 6a**

En la tarea 6b más estudiantes tuvieron éxito para resolverla, pues de igual forma se conocían los valores de los anchos y se pedía encontrar el largo del rectángulo proporcional. Los once alumnos de los veintinueve que integran el grupo, encontraron la relación entre el largo y el ancho del primer rectángulo, al darse cuenta que seis es la mitad de doce, de esta manera buscaron el número que correspondía a la mitad de cinco, es decir a la mitad de la medida del ancho del otro rectángulo. Pero los dieciocho alumnos restantes, siguieron un procedimiento que los condujo a tener errónea la actividad. En su mayoría lo que hicieron fue dividir el valor del largo del rectángulo (6cm) entre (2), obteniendo un resultado incorrecto. Al preguntarles sobre el porqué de esta operación, comentaron que debían sacar la mitad de seis porque es la mitad de doce. Se observa que iban por buen camino al detectar que el largo constituye la mitad del ancho en un rectángulo, pero después se perdieron ya que no pudieron establecer la relación correcta.

Al establecer una comparación entre los resultados de las dos tareas, se puede decir que se les facilitó un poco el trabajar con razones externas (Freudenthal, 1983), que con razones internas, aunque también influyeron los valores de las dimensiones de las figuras. En un caso se emplea la tercera parte de uno de los valores y en el otro se usa la mitad, y están más familiarizados para trabajar con mitades que con tercios.

*Análisis de la Tarea 7 (apartados a y b)*

Esta tarea se dividió en dos partes para su revisión, la 7a consistió en responder algunas preguntas basadas en el planteamiento de una situación familiar para el estudiante. La 7b se refirió al llenado de una tabla que justamente establecía una conexión con la actividad anterior. Al respecto podemos decir lo accesible que les resultó a los alumnos llenar una tabla, pero no así la relación que pueden establecer entre ella con el problema planteado.

La tabla es un modo de representación específico que requiere ser enseñado, es decir la tabla es un objeto de enseñanza y, se observó en los estudiantes facilidad para completar una tabla, por lo que se puede decir que su enseñanza fue en cursos anteriores, como es señalado en el programa oficial de la Secretaría de Educación Pública (1991a). En este caso, para su llenado, los niños sumaron de dos en dos y otros emplearon la tabla de multiplicar del dos. Esto indica que también están familiarizados con el operador escalar (x2) al utilizar este modo de representación.

Los alumnos que llegaron a responder correctamente a las preguntas solicitadas, en su mayoría, fue sin requerir de los resultados de la tabla. En sus explicaciones, algunos comentaron que se duplicaban las cantidades. Por ejemplo dijeron: *“para dos barras de chocolate se* *requiere de un litro de leche; entonces para 4 barras se empleará el doble, o sea 2 litros de leche o lo que es lo mismo, 2 litros de leche requieren de 4 barras de chocolate”.*

*Análisis de la Tarea 8*

Quienes dieron valores incorrectos a las cuestiones pedidas fue por distintas razones. Una de ellas porque no relacionaron la tabla con las preguntas, otra fue que mostraron confusión en la interpretación del texto, ya que en dos momentos se les pedía responder en función de las barras de chocolate que se necesitaban y en un tercer momento en función de los litros de leche. Las respuestas que dieron fueron todas para obtener la cantidad de barras de chocolate, de esta forma la tercera pregunta fue contestada no en términos de los litros de leche, como así se pedía, resultando incorrecta la respuesta dada.

En esta tarea se pretendía que el estudiante determinara el precio de dos botes de pintura, uno de un litro y el otro de cuatro litros, se les daba el precio de un bote de veinte litros. Sólo ocho de veintinueve estudiantes llegaron a la respuesta correcta, utilizando estrategias distintas. La mayoría empleó el camino de encontrar el valor unitario al dividir 300 pesos entre 20 litros y, una vez conocido el costo de un litro, a través de la multiplicación, determinaron el precio de cuatro litros. Sólo un niño se dio cuenta que cuatro litros es la quinta parte de veinte litros, por lo que procedió a dividir el precio de 300 pesos entre 5 para saber el costo del bote de cuatro litros y posteriormente dividió 60 pesos entre cuatro litros para saber el costo de un litro.

El error común detectado fue dividir los 300 pesos entre 4 litros, es decir, estos alumnos establecieron una relación errónea. Obstáculo ya presentado en la tarea 6a.

En esta tarea una parte de la información es dada a través del texto y la otra por medio del dibujo. Se pudo observar que éste les ayudó a los estudiantes para resolver el problema, pues comentaron que viendo el dibujo del bote de un litro se les ocurrió primero sacar su precio, para luego obtener el de cuatro litros. Respecto a los estudiantes que incurrieron en el error de dividir 300 pesos entre 4 litros se puede señalar que el establecimiento de relaciones les fue difícil.

Análisis de la Tarea 9

Este problema está clasificado entre los de valor perdido o desconocido. A los estudiantes se les dio tanto el precio como el número de bolsas de dulces correspondientes a él y se les pidió determinar el costo de otra cantidad de las mismas bolsas de dulces.

Diecinueve de los veintinueve estudiantes encuestados llegaron a una respuesta correcta. Todos emplearon la estrategia de determinar el valor unitario y algunos sumaron la cantidad obtenida tantas veces como bolsas había, mientras que otros emplearon la multiplicación. En esta tarea el dibujo jugó una parte importante en su resolución, ya que el conteo de las bolsas les facilitó obtener el costo del total pedido, una vez encontrado el precio de una bolsa, inclusive el dibujo fue un apoyo para el uso de la estrategia referente a la obtención del valor unitario pues debajo de cada figura que representaba la bolsa de dulces colocaron su costo.

En este problema tampoco usaron la regla de tres, con lo que se comprueba que la maestra titular del grupo no la enseñó, tal y como el programa de estudios lo señala, al no incorporarla. Al parecer también en los grados previos no fue enseñada.

*Análisis de la Tarea 10 (apartados a y b)*

En éstas se pretendía indagar si el estudiante podía inventar o formular una situación problemática a partir de conocer tres cantidades que se encontraban en una tabla, los encabezados de las columnas eran: número de paquetes y número de estampas. Dos de los valores conocidos correspondían a la primera columna, mientras que el otro a la segunda. En esta ocasión no se les dio a los alumnos el dato correspondiente al valor unitario. Dentro de las estrategias empleadas para el llenado de la tabla se encontró que varios alumnos primeramente determinaron el valor unitario y después procedieron a encontrar los valores restantes. Otros niños procedieron a completarla, usando la tabla de multiplicar del cinco y los restantes emplearon la suma repetida del valor cinco. No sólo interesó revisar la manera de llenarla, sino también, reconocer si establecían una relación entre ella y el problema planteado. Al respecto, la mayor parte del grupo no usó la información de la tabla para diseñar el problema.

Algunos alumnos crearon situaciones en las que no incorporaron las variables de la tabla, pero si inventaron problemas de valor desconocido empleando los tres que conocían. Otros formularon problemas que no guardaban relación ni con las los encabezados de las tabla, ni con los datos que en ella habían. En este grupo se encontraron niños que emplearon sumas sin repetir un valor ciertas veces, es decir, se estaba frente a un problema de no reconocer a la multiplicación como una suma abreviada y era necesario que hicieran el tránsito de lo aditivo a lo multiplicativo, como señala Hart (1988).

Se encontró que otros estudiantes utilizaron la multiplicación reconociéndola como una suma abreviada, pues comentaron que en lugar de multiplicar, también podían sumar.

## Discusión

Hay varios aspectos que se detectaron en cuanto al pensamiento cognitivo de los estudiantes, a través de las estrategias que emplearon en la resolución de las tareas. Algunas que ya fueron descritas, se resumen brevemente. La enseñanza escolar no ha explotado al máximo el pensamiento cualitativo de los estudiantes en torno a la proporcionalidad, lo cual se observó cuando manifestaron que se centraban en una de las dimensiones de las figuras que se les pedía reducir o amplificar. El visualizar en su conjunto un dibujo, y no fijarse en cada una de las partes de él, para poder seleccionar la reducción del original, muestra la necesidad de trabajar más el aspecto cualitativo de la proporcionalidad.

En algunos estudiantes, lo cualitativo está planteado escasamente como antesala de lo cuantitativo, ya que dentro de las categorías lingüísticas detectadas en ellos, están las siguientes: "es más grande que...", es más pequeño que...", lo cual refleja una cierta comprensión rudimentaria de la proporción, pero en estos mismos alumnos no se encontraron otras categorías a través de las cuales mostraran un mayor entendimiento de la idea de proporción. En general, mostraron confusión al establecer relaciones entre magnitudes.

Se reconoció la familiaridad que muchos alumnos tenían con el dibujo a escala, cuando una parte del dibujo ya estaba hecha, por lo que se ha señalado el predominio de la "ley del cierre" que prevalece en ellos. La dificultad detectada es el no reconocimiento del factor escalar (x3) en este tipo de tarea.

Se observó la facilidad que tienen los niños para llenar una tabla, a través de sumar determinada cantidad de veces un mismo número o haciendo uso de la multiplicación, una vez encontrado el operador escalar correspondiente. El problema detectado en el empleo de la tabla fue que los alumnos no extrajeron los datos de ella al dar respuesta a la situación planteada.

No hubo manifestación, por parte de los alumnos, en cuanto al uso de los diferentes modos de representación: el del tabla, el del dibujo y el numérico; al resolver problemas clasificados como “problemas de valor perdido”, pues varias tareas del cuestionario entraron en esta categoría, aunque las situaciones eran diferentes y sólo una de ellas (T9) fue resuelta correctamente por la mayoría del grupo.

Las actividades del cuestionario les permitían usar indistintamente cualquiera de los tres registros de representación mencionados, pero se observó que los niños no se percataron que el empleo de cualquiera de los tres los conducía a un mismo resultado, ya que en las resoluciones que dieron sólo se avocaron a trabajar con la representación propuesta en el problema. Ningún estudiante, por iniciativa propia, resolvió una misma tarea empleando al menos dos modos de representación diferentes.

Otro aspecto considerado como respuesta frecuente en los estudiantes fue el uso de la estrategia del valor unitario, al resolver algunas de las tareas, lo cual coincide con lo encontrado por varios investigadores, incluidos en la introducción de este artículo, interesados en el reconocimiento de estrategias al resolver problemas de razón y proporción.

Como la forma incorrecta (por parte de los estudiantes) de establecer relaciones al trabajar con actividades referidas a razón y proporción, la carencia de significado al usar algoritmos en este tipo de tareas, la necesidad de profundizar en el aspecto cualitativo del pensamiento de los educandos, entre otras.

## Referencias

Clark, M.R., Berenson, S.B. y Cavey, L.O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 297-317.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Guerrero, E., Gil, N. y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 4*(1), 47-72.

Gueudet, G. (2007). Learning Mathematics with E-exercises: A case about proportional reasoning. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14*(4), 169-182.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Concepts and operations in the Middle Grades, 2.* (pp. 198-219). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Markovits, Z., Hershkowits, R. y Bruckhemer, M. (1986). Proportional Reasoning Somme related situations. En University of London, *Psychology of Mathematics Education. Proceedings of the 10th International Conference* (pp. 259-265). London: Editor.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nesher, P. and Sukenik, M. (1989). Intuitive and formal learning of ratio concepts. En G. Vergnaud, J. Rogalski, y M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 33-40). Paris: Université Paris Descartes.

Piaget, J. (1978). *Psicología del Niño.* Madrid: Morata.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978a). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Ed.), *Lecturas en Psicología del niño, I* (pp. 70-119). Madrid: Alianza Editorial.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978b). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires: Paidós.

Ruiz, E. F., Lupiáñez, J. L. y Valdemoros, M. (2002). Didactical reflections on proportionality in the Cabri environment based on a previous experience with basic education students. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 153-160). Londres: University of East Anglia.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2002). Concepts of ratio and proportion in basic level students: case study. En D. Mewborn, P. Sztajn, E. White,H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 1651–1657). Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative Thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J. Hoines y A. B. Flugestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1* (pp. 201-208). Bergen: Bergen University College.

Secretaría de Educación Pública (2001a). *Plan de programas de estudio. Educación Básica. Primaria.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México D. F.: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2001b). *Matemáticas. Sexto grado.* Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos. México D. F.: SEP.

Streefland, L. (1984a). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. Part I. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 327-348.

Streefland, L. (1984b). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. Part II. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 25*(1-2), 109-135.

Thurston, A., Grant, G., Topping, K. J. (2006). La Construcción de la comprensión en ciencias Naturales de Primaria: una exploración del proceso y sus resultados en los contenidos de la luz y la tierra en el espacio. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 4(1),* 1-34.