Soluciones viscosas de ecuaciones en derivadas parciales elípticas de segundo orden

Trabajo Fin de Grado

Autor:

Francisco Criado Martínez

Tutor:

José Carmona Tapia

Grado en Matemáticas

Junio, 2018

Universidad de Almería

Índice general

Abstract in English

In this project, we introduce a concept of solution that weakens the concept of classical solution in partial differential equations. This is the viscosity solution, in particular we focus on the study of these solutions for second order elliptic partial differential equations.

We start by giving a brief historical introduction of the concept, in which we will see that it is relatively new, since the first articles dealing with viscosity solutions date from the 1980s. Several notions about classical solutions in partial differential equations will be remembered, focusing on some concrete examples that will help to understand the concept of viscosity solution.

Finally, we show the Perron method that will allow to study the existence of viscosity solutions. This method will be applied in a simple example of second order elliptic partial differential equation.

Resumen en español

En este trabajo, introducimos un nuevo concepto de solución que debilita al concepto de solución clásica en ecuaciones en derivadas parciales. Éstas son las soluciones viscosas, en particular nos centramos en el estudio de estas soluciones en el caso de ecuaciones en derivadas parciales elípticas de segundo orden.

Comenzamos dando una breve introducción histórica del concepto, en la que veremos que es relativamente nuevo, ya que los primeros artículos que tratan las soluciones viscosas datan de la década de 1980. Recordaremos algunas nociones básicas sobre soluciones clásicas en ecuaciones en derivadas parciales, haciendo especial énfasis en algunos ejemplos concretos que ayudarán a comprender el concepto de solución viscosa.

Finalmente, mostramos el método de Perron que nos permitirá estudiar la existencia de soluciones viscosas, el cual será aplicado en un ejemplo sencillo de ecuación en derivadas parciales elíptica de segundo orden.

1 Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales permiten modelar multitud de problemas reales. En la teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, éstas se clasifican en tres grandes grupos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. El modelo elíptico por excelencia involucra el operador de Laplace. La variable tiempo está ausente en este modelo. Es por eso que sólo permite describir estados estacionarios o de equilibrio.

Las ecuaciones parabólicas y las hiperbólicas, representadas respectivamente por la ecuación del calor y la de ondas, son los modelos más clásicos y representativos en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales de evolución. Sus características matemáticas son bien distintas. Mientras que la ecuación del calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en el tiempo en los que la información se propaga a velocidad infinita, la ecuación de ondas es el prototipo de modelo de propagación a velocidad finita y completamente reversible en el tiempo.

A veces, el concepto de solución en sentido clásico no es adecuado para el estudio de ciertos problemas ya que serán de complicada resolución analítica. Por ello, con este trabajo se pretende hacer una introducción a un concepto de solución más débil que el de solución en sentido clásico.

Para ello, partiremos de lo más básico definiendo el concepto de ecuación en derivadas parciales, concepto ya estudiado en el grado en la asignatura de *Ecuaciones de la Física Matemática*, viendo sus propiedades más características y unos ejemplos sencillos de fenómenos en los que son usadas estas ecuaciones, tales como la óptica geométrica, problemas de control en económicas... Para así posteriormente introducir el por qué es necesario que surja la idea de debilitar el concepto de solución clásica.

En caso de que la ecuación sea elíptica degenerada, que posteriormente definiremos, podemos definir este concepto de solución que debilita la solución clásica. En este caso, no será necesario que nuestra función sea derivable en todo punto, por tanto habrá puntos en los que no sea necesariamente diferenciable.

El término de solución viscosa aparece por primera vez en [6] por Michael G. Crandall y Pierre-Louis Lions en 1983 que trata sobre la ecuación de Hamilton-Jacobi. Dicha ecuación es

$$H(x,u,Du) = 0.$$

En él se introduce el concepto de solución viscosa como una generalización del concepto clásico de solución de una ecuación en derivadas parciales. Este nombre viene dado por el hecho de que la existencia de soluciones fue mostrada por el método *vanishing viscosity*. Dicho método fue utilizado para obtener soluciones de

$$H(x,u,Du) = 0 \qquad \text{en } \Omega, \qquad u = z \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Este método consiste en en aproximar dicho problema mediante uno de la forma

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u_\varepsilon + H_\varepsilon(x,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) \qquad \text{en } \Omega, \\ u_\varepsilon = z_\varepsilon \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\varepsilon > 0$, $H_\varepsilon, z_\varepsilon$ convergen localmente de manera uniforme a H y z respectivamente. Esto es, cuando ε es próximo a 0 converge a nuestro problema. Dicho ε podemos considerarlo como un coeficiente de viscosidad.

El concepto actual de solución viscosa fue introducido años antes, en 1980 por Lawrence C. Evans en [8], donde aplica el método de *vanishing viscosity* en la ecuación de Hamilton-Jacobi . Más adelante, Crandall, Evans y Lions en [4], publicado en 1984, profundizan algo más en la definición y propiedades de las soluciones viscosas aplicadas a la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Por unos años, el estudio de las soluciones viscosas se redujo a las ecuaciones de primer orden ya que no era conocido que en las ecuaciones elípticas de segundo orden la solución viscosa fuese única, salvo en casos muy concretos. Algo que empezó a cambiar con un resultado publicado por Robert Jensen en 1988 en [11], donde se prueba un principio de comparación usando una aproximación de la solución que tenía segunda derivada en casi todo punto.

En años siguientes el concepto de solución viscosa ha ido incrementando su presencia en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales elípticas. Basado en las propiedades de estabilidad, Barles y Souganidis en [1] obtuvieron una demostración general de la convergencia. Además, las propiedades de regularidad fueron obtenidas, especialmente en el caso elíptico, por Luis Caffarelli en [3]. Así, las soluciones viscosas empezaron a tomar importancia en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

En un enfoque moderno, la existencia de soluciones viscosas es buscada a partir del Método de Perron. El método *vanishing viscosity* no es muy útil, en general, en el estudio de ecuaciones de segundo orden. Generalmente, la existencia de soluciones viscosas no garantiza la existencia de soluciones clásicas.

2 Objetivos

Para el análisis global de ciertos fenómenos que pueden ser modelizados por ecuaciones en derivadas parciales elípticas de segundo orden es necesario usar un concepto de solución que permita al mismo tiempo debilitar profundamente la diferenciabilidad de las soluciones y obtener convenientes teoremas de existencia y unicidad.

Es por ello que, como ha sido reflejado en la introducción, con este trabajo se pretende presentar un concepto de solución que debilita al de solución clásica, este es el concepto de solución viscosa. Además, daremos varios criterios para estudiarlas y profundizaremos en el método de Perron que nos permitirá estudiar la existencia de soluciones viscosas bajo una serie de condiciones. Por tanto, los objetivos principales de este trabajo serán:

1. Introducir el concepto de solución viscosa, aplicado a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

2. Describir el método de Perron para la existencia de soluciones viscosas

Para desarrollar dichos objetivos será necesario introducir una serie de conceptos previos, algunos desarrollados durante el grado para llegar a la definición de solución viscosa, analizando varios ejemplos donde el concepto de solución viscosa ha sido empleado.

Además, otro aspecto a destacar en la elaboración de este trabajo es el de iniciación a la investigación, con una amplia búsqueda de bibliografía, para lograr abstraer y plasmar los conceptos, todo ello gracias a la capacidad de abstracción y síntesis adquirida en las distintas asignaturas del grado.

Para ello, utilizaremos conceptos vistos en diferentes asignaturas del grado. Aplicaremos conceptos de *Cálculo Diferencial e Integral*, además de *Ecuaciones Diferenciales I y II* y, como se ha dicho en la introducción, de *Ecuaciones de la Física Matemática*, donde se han estudiado los conceptos de ecuaciones en derivadas parciales.

3 Ecuaciones en derivadas parciales

En este capítulo, introduciremos los conceptos de ecuaciones en derivadas parciales, de solución clásica y solución débil que nos serán útiles para introducir el concepto de solución viscosa

3.1 Conceptos previos

La teoría de soluciones viscosas es aplicada al estudio de ecuaciones en derivadas parciales lineales y no lineales de cualquier orden. Comencemos dando unas definiciones básicas:

Definición 3.1. *Una ecuación en derivadas parciales de orden $k \geq 1$ es una ecuación que involucra a una función incógnita u definida en $\Omega \in \mathbb{R}^n$ y a sus derivadas de orden $1, 2, \ldots, k$ (Nótese que la función u deberá ser como mínimo $C^k(\Omega)$).*

Por ejemplo, consideremos $k = 2$:

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0,$$

donde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n} \to \mathbb{R}$.

Consideramos que F es lineal si es lineal en todos sus argumentos (salvo el primero). Una ecuación lineal importante es la conocida como ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

Un ejemplo de ecuación en derivadas parciales no lineal es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + y\right) = 0.$$

Consideraremos los siguientes problemas:

- Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

  donde Ω es un subconjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$ y g es una función continua, es nuestra condición de frontera.

- Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.2}$$

  donde g es una función continua y es la condición inicial.

Definición 3.2. *Dada una ecuación en derivadas parciales de orden $k \geq 1$, decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es solución (en sentido clásico) si $u \in C^k(\Omega)$ y u resuelve la ecuación en todo punto x de Ω.*

Ejemplo 3.1: Consideremos la siguiente ecuación:

$$|u'(x)| = 1 \text{ para } x \in]-1,1[.$$

Supongamos que existe una solución clásica con condición de Dirichlet $u(-1) = u(1) = 0$. Aplicando el Teorema del Valor Medio, existe $c \in]-1,1[$ tal que $u'(c) = 0$, por tanto u no sería solución.

Como $u \in C^1(\Omega)$, existe un intervalo no vacío $]-a,a[$ $(0 < a < 1)$ tal que $|u'(x)| < 1$ para $x \in]-a,a[\subset]-1,1[$ (En particular, al existir dicho c tal que $u'(c) = 0$, entonces para x en un entorno de c, $u'(x)$ es tan pequeña como se desee).

En este ejemplo, hemos visto la necesidad de debilitar el concepto de solución. Bastaría con que la solución sea Lipschitz en lugar de $C^1(\Omega)$, lo que implicaría que las derivadas primeras podrían no existir en todo punto, pero sí en casi todos. La idea será considerar que la solución satisfaga la ecuación únicamente en los puntos cuya derivada exista.

Definición 3.3. *Dada una ecuación en derivadas parciales de orden $k \geq 1$, se dice que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua es solución en casi todo punto si existen las derivadas hasta orden k en casi todo punto y además resuelven la ecuación.*

3.2 Selección de ecuaciones en derivadas parciales

Veremos que la teoría de soluciones viscosas es muy utilizada de cara al estudio de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Veamos algunos ejemplos en los que es utilizada esta teoría:

- Ecuación Eikonal
$$|Du| = f(x). \tag{3.3}$$
Es una ecuación en derivadas parciales no lineal encontrada en la propagación de ondas. Es una de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y proporciona una relación entre la óptica física y la óptica geométrica.

  Nótese que la ecuación del ejemplo anterior, es un caso particular de esta ecuación.

- Ecuación de Hamilton-Jacobi (estacionaria)

  Es una ecuación en derivadas parciales usada en la mecánica clásica y mecánica relativista que permite una formulación alternativa a la mecánica lagrangiana y hamiltoniana.
$$H(x,u,Du) = 0, \tag{3.4}$$
donde $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, llamado Hamiltoniano, es una función continua y, generalmente, convexa en p (la variable del gradiente). La ecuación Eikonal es un caso particular de éstas.

- Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

  Es una ecuación en derivadas parciales que es fundamental para la teoría de control óptimo. La solución es la función de valor, la cual da el costo mínimo para un sistema dinámico dado, con una función de costo asociada.

$$H(x,p) = \sup_{a\in A}\{-f(x,a)\cdot p - l(x,a)\}, \tag{3.5}$$

  donde $A \subset \mathbb{R}^m$, $l : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ son funciones continuas.

  Para cada $\lambda > 0$ fijo, la solución viscosa de:

$$\lambda u + H(x, Du) = 0, \tag{3.6}$$

  tiene una forma particular, que es conocida como el valor de la función asociado al correspondiente problema de control.

  Definición 3.4. *Una función de control es una función medible $\alpha : [0,+\infty[\to A$.*

  Definición 3.5. *Un problema de control corresponde al siguiente problema de valores iniciales. Sea $t > 0$,*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), \alpha(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$$

  Consideramos y_x^α como las trayectorias que resuelven el problema de control.

  Dados un problema de control y sus trayectorias $y_x^\alpha(t)$ definimos la función de coste como:

$$J(x,\alpha) = \int_0^{+\infty} l(y_x^\alpha(t), \alpha(t)) \cdot e^{-\lambda t} dt,$$

  donde $\lambda > 0$, es la tasa de interés.

  Sea $\mathbb{A} = \{\alpha(t) : \alpha \text{ función de control}\}$ el conjunto de los posibles controles en $\mathbb{A}$. Así,

$$v(x) = \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} J(x,\alpha),$$

  es la función que resuelve nuestra ecuación de partida.

- Ecuación de Monge-Ampère

  Es una ecuación en derivadas parciales no lineal de segundo orden. Aparece con frecuencia en la geometría diferencial de superficies, por ejemplo en los problemas de Weyl y Minkowski.

$$det(Du^2) = f(x). \tag{3.7}$$

  Tiene muchas aplicaciones dentro del campo de la geometría y el cálculo variacional (problema de transferencia de masa Monge-Kantorovitch).

Soluciones viscosas

4

En este capítulo, nos centraremos en el concepto de solución viscosa y trataremos de mostrarlo con varios ejemplos sencillos.

4.1 Definición y ejemplos básicos

Puesto que queremos un concepto de solución que no involucre tanta regularidad, podríamos decir que u es solución de $F(x,u,Du,Du^2)=0$ si $F(x,\varphi,D\varphi,D\varphi^2)=0$ para cada $\varphi\in C^2(\Omega)$ que valga lo mismo que u en x. Esto es demasiado restrictivo, pues no se verifica ni en el caso $u\in C^2(\Omega)$.

Sin embargo, si $u\in C^2(\Omega)$ y $\varphi\in C^2(\Omega)$ con $u(x)=\varphi(x)$ y solo se tocan en ese punto, entonces se puede decir algo sobre $F(x,\varphi(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x))$. Veámoslo con un ejemplo:

Supongamos que tenemos una solución clásica para $-\Delta u=0$ y consideremos una función $\varphi,\in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi\geq u$ y $\varphi(x_0)=u(x_0)$ para un punto x_0. Entonces $u-\varphi$ tiene un máximo local en x_0 (esto quiere decir que φ toca por arriba a u). Por tanto, $u-\varphi$ es localmente cóncava en x_0 por lo que:

$$0\geq\Delta(u-\varphi)(x_0)=\Delta u(x_0)-\Delta\varphi(x_0)\Rightarrow-\Delta\varphi(x_0)\leq 0.$$

Consideremos el caso contrario, en el que φ toque por abajo a u en x_0, $u\geq\varphi$ y $\varphi(x_0)=u(x_0)$. Entonces, $u-\varphi$ tiene un mínimo local en x_0, es localmente convexa en x_0 y $-\Delta\varphi(x_0)\geq 0$.

Definición 4.1. *Sea $\Omega\in\mathbb{R}^n$ abierto y $u:\Omega\to\mathbb{R}$, entonces dada la ecuación:*

$$F(x,u,Du,D^2u)=0. \tag{4.1}$$

- *Decimos que u es una subsolución viscosa de (4.1) en todo x_0 si para toda función test $\varphi\in C^2(\Omega)$ tal que $u-\varphi$ tiene un máximo local en x_0, se verifica la desigualdad:*

$$F(x_0,u(x_0),D(\varphi(x_0),D^2(\varphi(x_0))\leq 0.$$

- *u es una supersolución viscosa de (4.1) en todo x_0 si para toda función test $\varphi\in C^2(\Omega)$ tal que $u-\varphi$ tiene un mínimo local en x_0, se verifica la desigualdad:*

$$F(x_0,u(x_0),D(\varphi(x_0),D^2(\varphi(x_0))\geq 0.$$

- *u es solución viscosa de (4.1) en Ω si u es subsolución y supersolución viscosa en todo $x_0\in\Omega$*

Una vez estudiada la definición, es el momento de estudiar la relación entre las soluciones clásicas y las soluciones viscosas.

Proposición 4.1. *Supongamos que $u\in C^2(\Omega)$ es solución clásica de (4.1), entonces u es solución viscosa si cumple una de las siguientes condiciones:*

- *La ecuación no depende de D^2u (la ecuación es de primer orden).*

- *F satisface la siguiente desigualdad:*

$$F(x,z,p,M) \leq F(x,z,p,N), \text{ Para } M \geq N.$$

Esto es, F es elíptica degenerada.

Demostración. Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u-\varphi$ tiene un máximo local en x_0, entonces

$$Du(x_0) = D\varphi(x_0),$$

y

$$D^2u(x_0) \leq D^2\varphi(x_0).$$

Si la ecuación es de primer orden, se tiene:

$$F(x_0,u(x_0),Du(x_0)) = 0 = F(x_0,\varphi(x_0),D\varphi(x_0)),$$

y por tanto u es subsolución viscosa.
Para ver que es supersolución viscosa, supongamos que $u-\varphi$ tiene un mínimo local, $Du(x_0) = D\varphi(x_0)$. Partiendo de que la ecuación es de primer orden, obtenemos la igualdad anterior y por tanto, lo deseado.

Supongamos que la ecuación es de orden 2. Aplicando la segunda condición

$$D^2u(x_0) \leq D^2\varphi(x_0),$$

y aplicando que F es elíptica degenerada llegamos a:

$$0 = F(x_0,u(x_0),Du(x_0),D^2u(x_0)) \geq F(x_0,\varphi(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)).$$

Por otro lado, si partimos de que $u-\varphi$ tiene un mínimo local en x_0, tenemos que

$$D^2u(x_0) \geq D^2\varphi(x_0).$$

Así, obtenemos la otra desigualdad y, por tanto, u es solución viscosa.

□

Una vez estudiada esta relación, son necesarias las siguientes observaciones:

Nota 4.1. *Podemos extender la definición a ecuaciones de orden k, basta extender la regularidad de φ.*

Nota 4.2. *Para verificar la condición de subsolución viscosa (análogamente para supersoluciones viscosas), es suficiente con que la función sea semicontinua superiormente (semicontinua inferiormente).*

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 4.1: Consideremos la ecuación Eikonal tratada en el ejemplo 2.1. Recordemos que era:

$$|u'(x)| = 1 \text{ para } x \in]-1,1[. \tag{4.2}$$

Veamos que $u(x) = -|x| + 1$ es solución viscosa de (3.3).

Sea $\varphi \in C^1(]-1,1[)$, tal que $u-\varphi$ tiene un máximo local en x_0.
Si $x_0 \neq 0$,u es diferenciable y $|\varphi'(x_0)| = |u'(x_0)|$.
El problema está en $x_0 = 0$, donde $|x|$ no es derivable.

Por tanto, consideremos el caso donde $u-\varphi$ tiene un máximo local (respectivamente mínimo) en 0. Aplicando la definición de subsolución, tenemos que $x_0 = 0$ es un máximo local y asumimos que $u(0) = \varphi(0)$. Así, se cumple:

$$-|x| \leq u(x) - u(0) \leq \varphi(x) - \varphi(0),$$

en un entorno de 0, lo que nos lleva a las siguientes desigualdades:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq 1 \text{ si } x < 0,$$

y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \geq -1 \text{ si } x > 0.$$

Como $\varphi \in C^1(\Omega)$, si $x \to 0$, podemos afirmar que $|\varphi'(0)| \leq 1$ y por tanto cumple la definición de subsolución.

Veamos la condición de supersolución. Supongamos que $u-\varphi$ tiene un mínimo local el $x_0 = 0$, aplicando el argumento anterior tenemos:

$$\varphi(x) - \varphi(0) \leq u(x) - u(0) \leq -|x|.$$

Así, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \geq 1 \text{ si } x < 0,$$

y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq -1 \text{ si } x > 0.$$

Así, cuando $x \to 0$, tenemos que $D^+\varphi(0) \leq -1$ y $D^-\varphi(0) \geq 1$, lo que significa que $D^+\varphi(0) \neq D^-\varphi(0)$ y llegamos a una contradicción.

De manera que si no tenemos ninguna función de clase $C^1(\Omega)$ que toque por abajo a $u(x) = 1 - |x|$, podemos afirmar que se cumple trivialmente la condición de supersolución. Como hemos visto que u es subsolución y supersolución viscosa, entonces u es solución viscosa. ∎

Del mismo modo, probaremos que la función u no satisface la ecuación opuesta, es decir $-F = 0$.

Consideremos la ecuación Eikonal:

$$-|u'(x)| + 1 = 0.$$

Tomemos la función $\varphi(x) = -x^2+1$. Es claro que $\varphi \in C^1(\Omega)$, y toca por arriba a $-|u'(x)|+1 = 0$ en 0, véase la figura 4.1, pero $-|\varphi(0)|+1 = 1 > 0$, lo que implica que no se satisface la condición de subsolución. ∎

De manera análoga al ejemplo anterior, mostramos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2: A continuación, probaremos que $u(x) = |x| - 1$ es solución viscosa de $-|u'(x)| + 1 = 0$ pero no de $|u'(x)| - 1 = 0$.

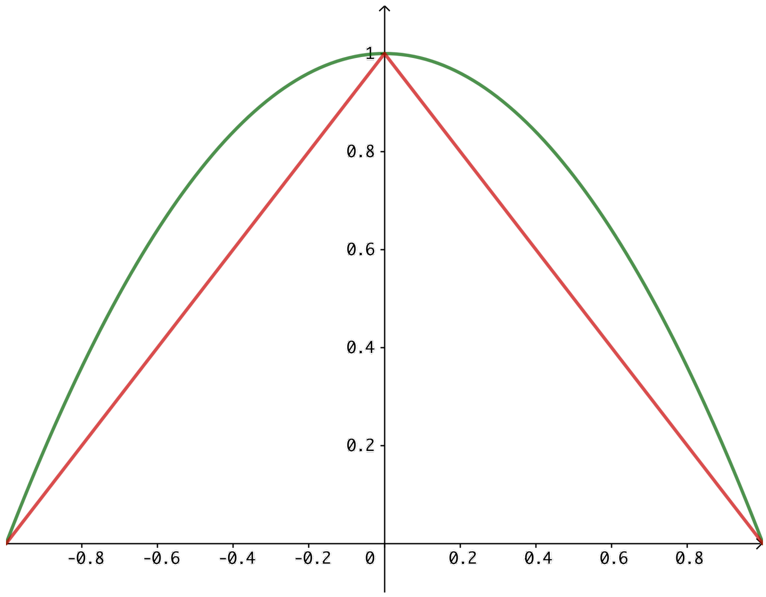

Figura 4.1: Ejemplo 4.1

- Primer caso: $-|u'(x)| + 1 = 0$.

  Sea $u(x) = |x| - 1$ en $\Omega =]-1, 1[$. Claramente $u(x)$ es derivable en $\mathbb{R}^*$,en particular en Ω. Por tanto, hemos de estudiar la viscosidad en el punto $x_0 = 0$ ya que en cualquier otro punto de Ω se cumple trivialmente.
  Sea $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en 0 y supongamos que $u(0) = \varphi(0)$, entonces en un entorno de 0 se tiene que:

$$|x| \leq u(x) - u(0) \leq \varphi(x) - \varphi(0).$$

  Así, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \geq 1 \text{ si } x > 0,$$

  y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq -1 \text{ si } x < 0.$$

  Así, tomando $x \to 0$, tenemos que $D^+\varphi(0) \geq 1$ y $D^-\varphi(0) \leq -1$, luego no existe ninguna función de clase C^1 que toque por arriba a u. Así, podemos afirmar que cumple trivialmente la condición de subsolución viscosa.

  Veamos la condición de supersolución. Supongamos que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0 = 0$ con $u(0) = \varphi(0)$. Entonces siguiendo un razonamiento análogo al caso de subsolución, tenemos:

$$\varphi(x) - \varphi(0) \leq u(x) - u(0) \leq |x|,$$

  y por tanto, obtenemos las desigualdades:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq 1 \text{ si } x > 0,$$

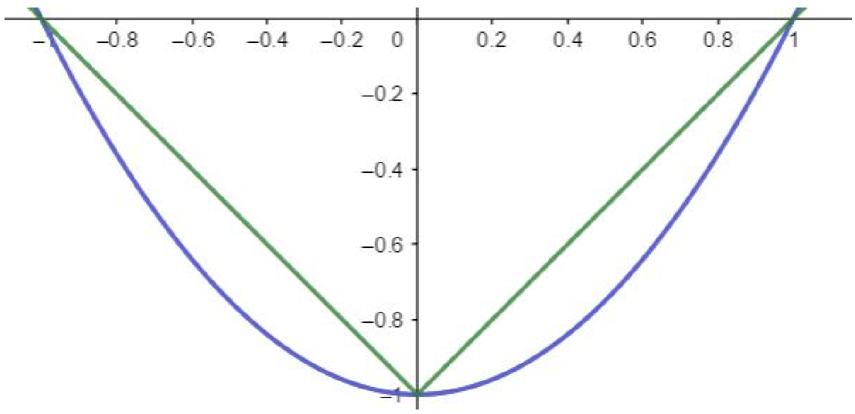

Figura 4.2: Ejemplo 4.2

y

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \geq -1 \text{ si } x<0.$$

Así, tomando $x \to 0$ tenemos que:

$$-1 \leq D\varphi'(0) \leq 1 \Rightarrow |\varphi'(0)| \leq 1.$$

Así podemos concluir con:

$$F(0, \varphi(0), \varphi'(0) = -|\varphi'(0)| + 1 \geq 0.$$

Lo que significa que u cumple la condición de subsolución y por tanto $u(x) = |x| - 1$ es solución viscosa de la ecuación de partida.

- Segundo caso: $|u'(x)| - 1 = 0$.

  Para ver que $u(x) = |x| - 1$ no es solución viscosa de esta ecuación basta tomar $\varphi(x) = x^2 - 1$ y ver que no es supersolución. Vemos que se cumplen las hipótesis de $u - \varphi > 0$ y $u(0) = \varphi(0)$, véase la figura 4.2 $F(0, \varphi(0), \varphi'(0) = -1 \leq 0$ y como tenemos que no es supersolución viscosa, concluimos que no es solución en sentido viscoso. ∎

A la vista de los ejemplos anteriores, probaremos que si u es solución viscosa de $F(x, u, Du, D^2u) = 0$, entonces $-u$ es solución viscosa de $-F(x, -u, Du, -D^2u) = 0$.

En efecto, como u es solución viscosa, en particular es subsolución y supersolución viscosa.

- Si u es subsolución, entonces $\forall \varphi \in C^2(\Omega)$ tenemos que $\forall x_0 \in \Omega$ que:

$$\begin{cases} u - \varphi < 0 & \forall x \neq x_0 \\ u(x_0) = \varphi(x_0) \end{cases} \tag{4.3}$$

  Por ser u subsolución, cumple que $F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$. Cambiando de signo las condiciones de (3.3), llegamos a:

$$\begin{cases} -u - (-\varphi) < 0 & \forall x \neq x_0 \\ -u(x_0) = (-\varphi)(x_0) \end{cases} \tag{4.4}$$

Con este cambio, por ser subsolución se tiene que:

$$F(x_0, -(-\varphi(x_0)), D-(-\varphi(x_0)), D^2-(-\varphi(x_0)) \leq 0.$$

Sea $\Psi = -\varphi$, con este cambio de variable y las condiciones dadas por (3.4) llegamos a:

$$\begin{cases} -u - \Psi < 0 & \forall x \neq x_0 \\ -u(x_0) = \Psi(x_0) \end{cases} \tag{4.5}$$

Así, tenemos que $F(x_0, -(\Psi(x_0)), D-(\Psi(x_0)), D^2-(\Psi(x_0)) \leq 0$, por lo que $-F(x_0, -(\Psi(x_0)), D-(\Psi(x_0)), D^2-(\Psi(x_0)) \geq 0$ y por tanto, $-u$ es supersolución de $-F(x, -u, Du, -D^2u) = 0$.

- De manera análoga, estudiamos qué sucede si u es supersolución. Entonces $\forall\varphi \in C^2(\Omega)$ tenemos que $\forall x_0 \in \Omega$ que:

  $$\begin{cases} u - \varphi > 0 & \forall x \neq x_0 \\ u(x_0) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

  Por ser u supersolución, cumple que $F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$. Cambiando de signo las condiciones anteriores, llegamos a:

  $$\begin{cases} -u - (-\varphi) < 0 & \forall x \neq x_0 \\ -u(x_0) = (-\varphi)(x_0) \end{cases}$$

  Y con este cambio, por ser supersolución se tiene

  $$F(x_0, -(-\varphi(x_0)), D-(-\varphi(x_0)), D^2-(-\varphi(x_0)) \geq 0.$$

  Sea $\Psi = -\varphi$, con este cambio de variable y las condiciones dadas anteriormente llegamos a:

  $$\begin{cases} -u - \Psi < 0 & \forall x \neq x_0 \\ -u(x_0) = \Psi(x_0) \end{cases} \tag{4.6}$$

  Así, tenemos que $F(x_0, -(\Psi(x_0)), D-(\Psi(x_0)), D^2-(\Psi(x_0)) \geq 0$, por lo que $-F(x_0, -(\Psi(x_0)), D-(\Psi(x_0)), D^2-(\Psi(x_0)) \leq 0$ y por tanto, $-u$ es subsolución de $-F(x, -u, Du, -D^2u) = 0$. ■

Función de Rademacher

El problema de la ecuación Eikonal tiene otras soluciones viscosas, la función de Rademacher es una de ellas. Por tanto, no hay unicidad en general.

La función conocida como la función de Rademacher, es una función definida a trozos de la siguiente forma:

$$u_k(x) = \begin{cases} x + 1 - \frac{i}{2^{k-1}} & \text{si } x \in [-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{2i+1}{2^k}[, \\ -x - 1 + \frac{i+1}{2^{k-1}} & \text{si } x \in [-1 + \frac{2i+1}{2^k}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}[, \end{cases} \tag{4.7}$$

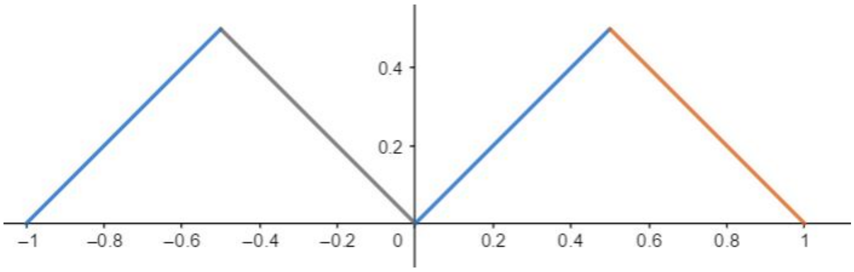

Figura 4.3: Función de Rademacher

con $i = 0, 1, 2, ..., 2^{k-1}$.

Veamos un ejemplo en el que comprobemos que esta función es solución viscosa de (3.3).

Ejemplo 4.2: Consideremos la función de Rademacher para $k = 1$, véase la Figura 4.3:

$$u_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{2}[\\ -x & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -x+1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

Es claro que u_1 es una función continua y derivable en todos sus puntos a excepción de la frontera. En los puntos en los que u_1 es continua y derivable, tendremos que será solución clásica. Por tanto, hemos estudiar la definición de solución viscosa en los puntos fronterizos:

- $x_1 = -\frac{1}{2}$

  Sea $\varphi \in C^1(\Omega)$, tal que $u_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $u_1 - \varphi$ tiene un máximo local estricto en x_1. En un entorno de dicho punto, se tiene que:

  $$|x| \leq u_1(x) - u_1(x_1) \leq \varphi(x) - \varphi(x_1).$$

  De la siguiente desigualdad se desprenden dos condiciones:

  $$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x} \geq 1 \text{ si } x > 0,$$

  y

  $$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x} \leq -1 \text{ si } x < 0.$$

  Así, cuando $x \to 0$, tenemos que $D^+\varphi(x_1) \leq -1$ y $D^-\varphi(x_1) \geq 1$, lo que significa que $D^+\varphi(x_1) \neq D^-\varphi(x_1)$ y llegamos a una contradicción.

  De manera que si no tenemos ninguna función de clase $C^1(\Omega)$ que toque por arriba a $u_1(x)$ en el primer tramo, podemos afirmar que se cumple trivialmente la condición de subsolución en x_1.

De manera análoga, vemos que es supersolución:

$$\varphi(x) - \varphi(x_1) \leq u_1(x) - u_1(x_1) \leq |x|.$$

Así, se desprenden las siguientes desigualdades:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x} \geq -1 \text{ si } x < 0,$$

y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x} \leq 1 \text{ si } x > 0.$$

Así, tomando $x \to 0$ tenemos que:

$$-1 \leq D\varphi'(0) \leq 1 \Rightarrow |\varphi'(0)| \leq 1,$$

lo que significa que u_1 cumple la condición de supersolución en x_1.

- $x_2 = 0$ (Análogo al caso anterior)

  Sea $\varphi \in C^1(\Omega)$, tal que $u_1(0) = 0 = \varphi(0)$ y $u_1 - \varphi$ tiene un máximo local estricto en x_2. En un entorno de dicho punto, se tiene que:

$$|x| \leq u_1(x) - u_1(x_2) \leq \varphi(x) - \varphi(x_2).$$

  De la siguiente desigualdad llegamos a dos condiciones

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x} \geq 1 \text{ si } x > 0,$$

  y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x} \leq -1 \text{ si } x < 0.$$

  De manera similar al caso anterior, cuando $x \to 0$, tenemos que $D^+\varphi(x_2) \leq -1$ y $D^-\varphi(x_2) \geq 1$, lo que significa que $D^+\varphi(x_2) \neq D^-\varphi(x_2)$ y llegamos a una contradicción.

  De manera que si no tenemos ninguna función de clase $C^1(\Omega)$ que toque por arriba a $u_1(x)$ en el primer tramo, podemos afirmar que se cumple trivialmente la condición de supersolución en x_2.

  Veamos que es supersolución:

$$\varphi(x) - \varphi(x_2) \leq u_1(x) - u_1(x_2) \leq |x|.$$

  Así, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x} \geq -1 \text{ si } x < 0,$$

  y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x} \leq 1 \text{ si } x > 0.$$

  Así, $|\varphi'(x_2)| \leq 1$ por tanto, cumple la condición de supersolución viscosa para (3.3).

- $x_3 = \frac{1}{2}$ Sea $\varphi \in C^1(\Omega)$, tal que $u_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = \varphi(\frac{1}{2})$ y $u_1 - \varphi$ tiene un máximo local estricto en x_1. En un entorno de dicho punto, se tiene que:

$$-|x| \leq u_1(x) - u_1(x_3) \leq \varphi(x) - \varphi(x_3).$$

De aquí, tenemos que:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_3)}{x} \geq -1 \text{ si } x > 0,$$

y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_3)}{x} \leq 1 \text{ si } x < 0.$$

Así, tomando $x \to 0$ tenemos que:

$$-1 \leq D\varphi'(0) \leq 1 \Rightarrow |\varphi'(0)| \leq 1.$$

Lo que significa que u_1 cumple la condición de subsolución en x_3.

Veamos que es supersolución:

$$\varphi(x) - \varphi(x_3) \leq u_1(x) - u_1(x_3) \leq -|x|.$$

Así, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_3)}{x} \leq -1 \text{ si } x > 0,$$

y

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_3)}{x} \geq 1 \text{ si } x < 0.$$

Por tanto, mediante un razonamiento análogo a los anteriores, tenemos que no hay ninguna función que toque por abajo a u_1 y por tanto se cumple trivialmente la condición de supersolución.

Tras comprobar los puntos frontera, podemos concluir que la función de Rademacher es solución viscosa de (3.3). ■

4.2 Aproximación de soluciones viscosas

En esta sección, estudiaremos la consistencia y la estabilidad de las soluciones viscosas. Lo más usual es aproximar el problema por uno donde sea sencillo obtener soluciones y estudiar si en el paso al límite, obtenemos una solución del problema inicial.

El siguiente teorema nos garantiza que las soluciones viscosas son consistentes.

Proposición 4.2. *Sean F_ε, F funciones continuas en todas sus variables con $F_\varepsilon \to F$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Tomemos u_ε una solución viscosa de:*

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) = 0,$$

tal que $u_\varepsilon \to u$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Entonces u es solución viscosa de:

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0.$$

Demostración. Partimos estudiando la convergencia. Como ésta es uniforme, entonces u es continua.
Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u-\varphi$ tiene un máximo local estricto en x_0. Denotemos por $B_R(x_0)$ a la bola de centro x_0 y radio R donde $u(x)-\varphi(x) \leq u(x_0)-\varphi(x_0)$. Sea $K = \overline{B_R(x_0)}$ y sea x_ε el máximo de $u_\varepsilon - \varphi$ en K.

Queremos comprobar que $x_\varepsilon \to x_0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Como $x_\varepsilon \in K$, que es compacto, existe $y \in K$ tal que $x_\varepsilon \to y$. En particular se tiene:

$$u_\varepsilon(x_0) - \varphi(x_0) \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon).$$

Si hacemos que $\varepsilon \to 0^+$, tenemos:

$$u(x_0) - \varphi(x_0) \leq u(y) - \varphi(y).$$

Como x_0 es máximo local, no puede haber un elemento mayor que el máximo, por tanto deducimos que $x_0 = y$.
Como u_ε es solución viscosa, se tiene que:

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\varphi(x_\varepsilon), D^2\varphi(x_\varepsilon)) = 0.$$

Por tanto, si $\varepsilon \to 0^+$ tenemos que u es subsolución viscosa.

De manera análoga, veamos que u es supersolución en sentido viscoso.
Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0. Llamamos $B_R(x_0)$ a la bola donde $u(x_0)-\varphi(x_0) \leq u(x)-\varphi(x)$. Sea $A = \overline{B_R(x_0)}$ y sea x_ε el mínimo de $u_\varepsilon - \varphi$ en A.
Como $x_\varepsilon \in A$ (compacto), tenemos que existe $z \in A$ tal que $x_\varepsilon \to z$. Sabemos que x_ε es mínimo en A, en particular tenemos que:

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon) \leq u_\varepsilon(x_0) - \varphi(x_0).$$

Haciendo que $\varepsilon \to 0^+$, llegamos a:

$$u(z) - \varphi(z) \leq u(x_0) - \varphi(x_0).$$

Como x_0 era un mínimo local, tenemos que $x_0 = z$.

Como u_ε es solución viscosa, se tiene que:

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\varphi(x_\varepsilon), D^2\varphi(x_\varepsilon)) = 0.$$

Por tanto, si $\varepsilon \to 0^+$ tenemos que u es supersolución viscosa.

Como es supersolución y subsolución viscosa, concluimos con que u es solución viscosa de (4.1).

□

Proposición 4.3. *Sea $v \in F$ una familia de subsoluciones (respectivamente supersoluciones) viscosas de (4.1) y considerando:*

$$u(x) = \sup_{v \in F} v(x) \ \text{ en el caso de subsolución,}$$

y

$$u(x) = \inf_{v \in F} v(x) \ \text{ en el caso de supersolución.}$$

Para simplificar, supondremos que $u(x)$ es semicontinua superiormente (respectivamente semicontinua inferiormente), entonces u es subsolución viscosa (respectivamente supersolución viscosa).

Demostración. Demostremos ambos casos:

- Caso de supersolución:
$$u(x) = \inf_{v \in F} v(x).$$
Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local estricto en x_0, entonces existe $r > 0$ tal que
$$u(x_0) - \varphi(x_0) < u(x) - \varphi(x) \ \ \forall x \in B_r(x_0) \backslash \{x_0\}$$
Tenemos que
$$u(x_0) = \inf_{v \in F} \{v(x_0)\}.$$
Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in F$ tal que
$$v_n(x_0) < u(x_0) + \frac{1}{n}.$$
Sea x_n una sucesión de puntos donde $v_n - \varphi$ tiene mínimo en $K = \overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}$, es decir
$$v_n(x_n) - \varphi(x_n) \leq v_n(x) - \varphi(x), \ \ \forall x \in K.$$
Supongamos que dicha sucesión es converge a un punto $y \in K$. Como $u \leq v_n$, para todo $v_n \in F$, si evaluamos la desigualdad anterior en x_0 llegamos a
$$u(x_n) - \varphi(x_n) \leq v(x_n) - \varphi(x_n) \leq u_n(x_0) - \varphi(x_0) < u(x_0) + \frac{1}{n} - \varphi(x_0).$$
Así, si $n \to \infty$, usando la semicontinuidad inferior de u y la continuidad de φ, obtenemos
$$u(y) - \varphi(y) \leq u(x_0) - \varphi(x_0),$$
y como x_0 era el mínimo estricto, se tiene que $x_0 = y$.
Por tanto, como v_n eran supersoluciones viscosas, sabemos que
$$F(x_n, \varphi(x_n), D\varphi(x_n), D^2\varphi(x_n)) \geq 0,$$
donde si $n \to \infty$, tendremos que
$$F(y, \varphi(y), D\varphi(y), D^2\varphi(y)) \geq 0,$$
donde aplicando que $y = x_0$ y $u(x_0) = \varphi(x_0)$ tenemos que u es supersolución viscosa.

- Caso de subsolución:
$$u(x) = \sup_{v \in F} v(x).$$
Procederemos de manera análoga al caso de supersolución. Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local estricto en x_0. Tenemos que existe $r > 0$ tal que
$$u(x_0) - \varphi(x_0) > u(x) - \varphi(x) \ \ \forall x \in B_r(x_0)$$

Es claro que

$$u(x_0) = \sup_{v \in F}\{v(x_0)\},$$

entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in F$ tal que

$$v_n(x_0) > u(x_0) - \frac{1}{n}.$$

Sea x_n una sucesión de puntos en la que $v_n - \varphi$ tiene un máximo en $K = \overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}$ y así se desprende la siguiente desigualdad:

$$v_n(x_n) - \varphi(x_n) \geq v_n(x_n) - \varphi(x) \;\; \forall \in K.$$

Supongamos que dicha sucesión x_n converge a un punto $z \in K$. Aplicando que $u \geq v_n$ para cualquier $v_n \in F$ y la desigualdad anterior aplicada al punto x_0, llegamos a la siguiente cadena de desigualdades:

$$u(x_n) - \varphi(x_n) \geq v_n(x_n) - \varphi(x_n) \geq v_n(x_0) - \varphi(x_0) > u(x_0) - \frac{1}{n}.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ y usando la semicontinuidad superior de u y la continuidad de φ llegamos a:

$$u(z) - \varphi(z) \geq u(x_0) - \varphi(x_0),$$

pero partíamos de que x_0 era un máximo estricto, por tanto $z = x_0$.

Además, como v_n son subsoluciones, tenemos que

$$F(x_n, \varphi(x_n), D\varphi(x_n), D^2\varphi(x_n)) \leq 0,$$

donde si $n \to \infty$, tendremos que

$$F(z, \varphi(z), D\varphi(z), D^2\varphi(z)) \leq 0,$$

aplicando que $z = x_0$ y $u(x_0) = \varphi(x_0)$ tenemos que u es subsolución viscosa.

□

Nota 4.3. *Nótese que en general, el supremo de supersoluciones viscosas (respectivamente el ínfimo de subsoluciones viscosas) no tiene por qué ser supersoluciones (respectivamente subsoluciones) viscosas.*

5 Existencia de soluciones viscosas por el Método de Perron

En este capítulo estudiaremos el Método de Perron, el cual utilizaremos para mostrar la existencia de soluciones viscosas.

5.1 El Método de Perron

El Método de Perron fue introducido por el matemático alemán Oskar Perron, en [12], en 1923 con el objetivo de encontrar soluciones para la ecuación de Laplace.

El método trata de construir la solución como el supremo de una familia de subsoluciones, en nuestro caso, en sentido viscoso.

Únicamente habría que probar que es además una supersolución viscosa, puesto que el supremo de una subsolución es también subsolución. Puede ser resumido por el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *(Método de Perron) Supongamos:*

- *Principio de comparación para (4.1), dadas una subsolución viscosa u y v una supersolución viscosa con la mismas condiciones de contorno, entonces $u \leq v$.*
- *Supongamos que existen $\underline{u}$ y $\overline{u}$ subsolución y supersolución viscosas respectivamente satisfaciendo la misma condición de contorno.*

  Definimos
  $$W(x) := \sup\{w(x) \mid \underline{u} \leq w \leq \overline{u},\ w \text{ subsolución}\}.$$
  Entonces, $W(x)$ es solución viscosa de la ecuación en derivadas parciales que satisface la condición inicial de $\underline{u}$ y $\overline{u}$.

  Consideremos el siguiente conjunto
  $$Z = \{w \mid \underline{u} \leq w \leq \overline{u},\ w \text{ subsolución}\}.$$
  Así, podemos expresar W como:
  $$W(x) = \sup_{v \in Z} v(x).$$

Para demostrar el teorema hemos de probar el siguiente lema previo:

Lema 5.1. *Sea $v \in Z$ tal que v no es supersolución viscosa, entonces existe $w \in Z$ tal que $v(y) < w(y)$ para algún $y \in \Omega$.*

Demostración. Tomemos $v \in Z$ y supongamos que no es supersolución viscosa, esto significa que existe $y_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $v(y_0) = \varphi(y_0)$ y $v - \varphi$ tiene un mínimo local estricto en y_0 y se tiene que
$$F(y_0, v(y_0), Dv(y_0), D^2 v(y_0)) < -\eta,$$
con $\eta > 0$.

Trataremos de utilizar dicha función test φ para construir una subsolución $w \in Z$ tal que $v(y_0) < w(y_0)$.

Nótese que $v(y_0) < \overline{u}$. De hecho, si $v(y_0) = \overline{u}(y_0)$ (recordemos que $\overline{u} \geq v \geq \varphi$) entonces $\overline{u} - \varphi$ tendría un mínimo local en y_0. Como $\overline{u}$ es supersolución viscosa, tendríamos que

$$F(y_0, v(y_0), Dv(y_0), D^2v(y_0)) \geq 0,$$

lo que contradice que

$$F(y_0, v(y_0), Dv(y_0), D^2v(y_0)) < -\eta.$$

Sea $f(y) = \overline{u} - v(y)$ y consideremos $f(y_0) = a > 0$. Usando la continuidad de f, nos preguntamos si existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(y) > \delta_1$ $\forall y \in \overline{B_{\delta_1}(y_0)}$. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, pues basta tomar $\delta_1 \leq \frac{a}{2}$, entonces por continuidad de f en y_0, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(y) - f(y_0)| < \frac{a}{2}$, $\forall |y - y_0| < \varepsilon$.

Así $f(y) > f(y_0) - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > \varepsilon$ puesto que:

- Si $\varepsilon > \frac{a}{2} \Rightarrow \delta_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{4}$
- Si $\varepsilon < \frac{a}{2} \Rightarrow \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

Hemos probado que

$$v(y) + \delta_1 < \overline{u}(y) \text{ en } B_{\delta_1}(y_0).$$

Definimos la función

$$w(x) = \begin{cases} \text{máx}\{\varphi(x) + \alpha(\delta), v(x)\} & x \in B_\delta(y_0), \\ v(x) & x \notin B_\delta(y_0), \end{cases} \tag{5.1}$$

donde δ será fijado más adelante.

Veamos qué $w(x) \leq \overline{u(x)}$.

- Si $w(x) = v(x)$ se cumple por hipótesis.
- Si $w(x) = \varphi(x) + \alpha(\delta)$, tenemos que en $x \in B_{\delta_1}(y_0)$:

  $$\varphi(x) + \alpha(\delta) \leq v(x) + \alpha(\delta) \leq v(x) + \delta_1 \leq \overline{u(x)} \text{ con } \delta < \delta_1,$$

  y

  $$w(y_0) = \text{máx}\{\varphi(y_0) + \alpha(\delta),\ v(y_0)\} = \varphi(y_0) + \alpha(\delta) > v(y_0),$$

  ya que $\alpha(\delta) > 0$.

El siguiente paso será probar que w es continua y subsolución viscosa.

- Continuidad

  W es continua trivialmente en $\Omega \backslash \partial B_\delta(y_0)$. Hemos de estudiar la continuidad en $\partial B_\delta(y_0)$, para ello basta comprobar que

  $$\text{máx}\{\varphi(x) + \alpha(\delta),\ v(x)\} = v(x) \ \ \forall x \in \partial B_\delta(y_0).$$

  Así

  $$\varphi(x) + \alpha(\delta) \leq v(x) \ \ \forall x \in \partial B_\delta(y_0).$$

Consideremos

$$\alpha_1(\delta) = \min_{x \in B_\delta(y_0)} \{v(x) - \varphi(x)\}.$$

Es claro que $\alpha_1(\delta) > 0$ y es mínimo local estricto de $v - \varphi$ en y_0. Para concluir, basta tomar $\alpha(\delta) = \min\{\alpha_1(\delta),\ \delta\}$.

- Subsolución viscosa

  Dado $x_0 \in \Omega$ y dada $\Psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $w(x) - \Psi(x)$ tiene un máximo local estricto en x_0 y satisfaciendo $w(x_0) = \Psi(x_0)$.
  Tenemos que ver que

  $$F(x_0, w(x_0), D\Psi(x_0), D^2\Psi(x_0)) \leq 0,$$

  para lo que distinguiremos dos casos:

  - $w(x_0) = v(x_0)$
    Sabiendo que $w - \Psi$ tiene un máximo local estricto en x_0, podemos asegurar que $v - \Psi$ también lo tendrá, pues dado $\sigma > 0$

    $$0 > w(x) - \Psi(x) \geq v(x) - \Psi(x) \ \ \forall x \in B_\sigma \backslash \{x_0\},$$

    con $v(x_0) = \Psi(x_0)$. Así, aplicando que v es subsolución, obtenemos

    $$F(x_0, v(x_0), D\Psi(x_0), D^2\Psi(x_0)) \leq 0,$$

    y por hipótesis $w(x_0) = v(x_0)$ y por tanto

    $$F(x_0, w(x_0), D\Psi(x_0), D^2\Psi(x_0)) \leq 0,$$

    por lo que w es subsolución viscosa en este caso.
  - $w(x_0) = \varphi(x_0) + \alpha(\delta)$
    En este caso, tenemos que x_0 está en $B_\delta(y_0)$. Tendremos que

    $$F(x_0, w(x_0), D\Psi(x_0), D^2\Psi(x_0)) \leq 0.$$

    Si:

    $$w(x) - \Psi(x) = \varphi(x) + \alpha(\delta) - \Psi(x),$$

    tiene un máximo local estricto en x_0, esto es:

    1. x_0 es punto crítico de $\varphi(x) + \alpha(\delta) - \Psi(x)$, por lo que $D\varphi(x_0) = D\Psi(x_0)$
    2. $D^2\varphi(x_0) - D^2\Psi(x_0)$ es definida positiva.

    Así,

    $$\begin{aligned} F(x_0, w(x_0), D\Psi(x_0), D^2\Psi(x_0) - D^2\varphi(x_0) + D^2\varphi(x_0)) \leq \\ \leq F(x_0, \varphi(x_0) + \alpha(\delta), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)), \end{aligned}$$

    donde hemos aplicado que F es elíptica degenerada.
    Para lograr lo deseado, basta que

    $$F(x_0, \varphi(x_0) + \alpha(\delta), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) < 0.$$

    Por tanto, para cierto $\delta_2 > 0$ hemos de controlar:

1. $|x_0 - y_0| < \delta_2$
   Se cumple trivialmente, puesto que $x_0 \in B_\delta(y_0)$.
2. $|\varphi(x_0) + \alpha(\delta) - v(y_0)| < \delta_2$

$$|\varphi(x_0) + \alpha(\delta) - v(y_0)| = |\varphi(x_0) - \varphi(y_0) + \alpha(\delta)| \leq$$

$$\leq |\varphi(x_0) - \varphi(y_0)| + \alpha(\delta) \leq \|D\varphi(\xi)\||x_0 - y_0| + \alpha(\delta) \leq c \cdot \delta \leq (c+1)\delta < \delta_2,$$

   donde se ha aplicado el Teorema del Valor Medio y $c = \max_{\xi \in \overline{\Omega}} \|D\varphi(\xi)\|$
3. $\|D\varphi(x_0) - D\varphi(y_0)\|$

$$\|D\varphi(x_0) - D\varphi(y_0)\| \leq \|D^2\varphi(\xi)\|\|x_0 - y_0\| < c_1\delta < \delta_2,$$

   con $c_1 > 0$ constante que tenemos gracias a la continuidad de $D^2\varphi$ en y_0.
4. $\|D^2\varphi(x_0) - D^2\varphi(y_0)\| < \delta_2$
   Esto se cumple si

$$\|x_0 - y_0\| < \gamma(\delta_2).$$

   Por tanto, basta tomar $\delta < \gamma(\delta_2)$.

Así, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\delta_2}{c_1}, \frac{\delta_2}{c+1}, \gamma(\delta_2),\}$ podemos concluir con la prueba del lema.

□

Una vez hemos probado el lema, podemos demostrar 5.1.

Demostración (Teorema 5.1). Es claro que $Z \neq \emptyset$ ya que W es subsolución viscosa de (4.1) satisfaciendo la misma condición inicial. Gracias al lema previo, podemos garantizar que W es supersolución (suponiendo la continuidad de W). Si suponemos que W no es supersolución, el lema contradice que W sea el supremo de F.

□

Nota 5.1. *En general, W no siempre será continua. Bastará con que W sea semicontinua inferiormente.*

El Método de Perron es una buena herramienta para probar resultados de existencia para ecuaciones en derivadas parciales (de primer y segundo orden). La desventaja de éste es que no nos da una fórmula representativa de la solución ni ofrece información sobre la regularidad de la misma.

5.2 Otras propiedades

En esta sección estudiaremos algunas propiedades interesantes acerca de las soluciones viscosas.

Proposición 5.1. *Sea $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ con $\Phi' > 0$ y $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Si u es subsolución (respectivamente supersolución) viscosa de (4.1). Entonces $v = \Phi \circ u$ es subsolución (respectivamente supersolución) de*

$$F(x, \Psi(v(x)), \Psi'(v(x))Dv, \Psi''(v(x))DvDv^T + \Psi'(v(x))D^2v) = 0, \tag{5.2}$$

con $\Psi = \Phi^{-1}$.

Demostración. Estudiaremos ambos casos por separado:

- Supongamos que v es subsolución. Como $\Phi' > 0$, entonces $\Psi' > 0$, por tanto Ψ es creciente.

  Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $v - \varphi$ tiene un máximo local en x_0, que podemos suponerlo 0. entonces
  $$\begin{cases} v(x) \le \varphi(x) & \text{En un entorno de } x_0 \\ v(x_0) = \varphi(x_0) \end{cases}$$
  Como Ψ es creciente, por la desigualdad anterior tenemos que
  $$\begin{cases} u(x) \le \Psi \circ \varphi(x) & \text{En un entorno de } x_0 \\ u(x_0) = \Psi \circ \varphi(x_0) \end{cases}$$
  Así, llamando $\tilde{\phi} = \Psi \circ \varphi(x)$ tenemos que $\tilde{\phi}$ es una función test que toca por arriba a u y además:
  $$F(x_0, u(x_0), D\tilde{\phi}(x_0), D^2\tilde{\phi}(x_0)) \le 0,$$
  con
  $$D\tilde{\phi}(x_0) = D(\Psi \circ \varphi)(x_0) = \Psi'(\varphi(x_0))D\varphi(x_0),$$
  y
  $$D^2\tilde{\phi}(x_0) = D^2(\Psi'(\varphi(x_0))D\varphi(x_0)) = \Psi''(\varphi(x_0))D\varphi(x_0)D\varphi^T(x_0) + \Psi'(\varphi(x_0))D^2\varphi(x_0),$$
  podemos concluir ya que $v(x_0) = \varphi(x_0)$ y por tanto obtenemos lo buscado.

- De manera análoga, supongamos que v es supersolución. Como $\Phi' > 0$, entonces $\Psi' > 0$, tenemos que Ψ es creciente. Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ de manera que $v - \varphi$ tiene un mínimo local estricto (que podemos suponer como 0). Entonces, dado $\varepsilon > 0$ se tiene
  $$\begin{cases} v(x) \ge \varphi(x) & \forall x \in B_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\} \\ v(x_0) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

Como Ψ es creciente, tenemos que

$$\begin{cases} u(x) \geq \Psi \circ \varphi(x) \ \ \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\} \\ u(x_0) = \Psi \circ \varphi(x_0) \end{cases}$$

Como en el caso anterior, $\tilde{\phi} = \Psi \circ \varphi(x)$ tenemos que $\tilde{\phi}$ es una función test que toca por abajo a u y además

$$F(x_0, u(x_0), D\tilde{\phi}(x_0), D^2\tilde{\phi}(x_0)) \geq 0,$$

con

$$D\tilde{\phi}(x_0) = D(\Psi \circ \varphi)(x_0) = \Psi'(\varphi(x_0))D\varphi(x_0),$$

y

$$D^2\tilde{\phi}(x_0) = D^2(\Psi'(\varphi(x_0))D\varphi(x_0)) = \Psi''(\varphi(x_0))D\varphi(x_0)D\varphi^T(x_0) + \Psi'(\varphi(x_0))D^2\varphi(x_0),$$

podemos concluir ya que $v(x_0) = \varphi(x_0)$ y por tanto obtenemos lo buscado.

□

Una vez probado el teorema, nos preguntamos que ocurriría si $\Phi' < 0$.

Si observamos el ejemplo 4.1, teníamos que $u(x) = -|x| + 1$ era solución viscosa de $|u'| - 1 = 0$, pero no de su opuesta.

Este simple ejemplo nos muestra que con un simple cambio de la monotonía de la solución viscosa, no tiene por qué seguir siendo solución viscosa.

Veamos que sucede cuando la transformación sea un cambio de cartas. Consideremos $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo.

Para mayor sencillez, consideremos el caso de primer orden

$$F(x, z, p, M) = F(x, z, p).$$

Nótese que en este caso $D\Phi$ no es un vector, sino una matriz n x n simétrica (usualmente llamada matriz Jacobiano, denotada por $J\Phi$).

Proposición 5.2. *Sea u una solución viscosa de*

$$F(x, u, Du) = 0,$$

y $\Phi \in C^1$ un difeomorfismo. Entonces $v = u \circ \Phi$ es solución viscosa de

$$F(y, v(\Phi^{-1}(y)), (D\Phi^{-1})^T(y) Dv(\Phi^{-1}(y))) = 0. \tag{5.3}$$

Demostración. Estudiaremos ambos casos por separado:

- Probemos que v es subsolución de (5.3). Para ello, sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $v - \varphi$ tiene un máximo local en x_0, esto es

$$u(\Phi(x)) - \varphi(x) \leq u(\Phi(x_0)) - \varphi(x_0) \Rightarrow u(y) - \varphi \circ \Phi^{-1}(y) \leq u(y_0) - \varphi \circ \Phi^{-1}(y_0),$$

  con y=$\Phi(x)$ e $y_0 = \Phi(x_0)$.

  Por tanto, $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \Phi^{-1}$ es una función test que toca por arriba a u en y_0. Aplicando nuestra hipótesis de partida de que u es subsolución viscosa (recordemos que u es solución viscosa), podemos concluir con $u = v \circ \Phi^{-1}$ y

$$D\tilde{\varphi}(y) = D\left(\Phi^{-1}\right)^T(y) D\varphi\left(\Phi^{-1}(y)\right).$$

- De manera análoga estudiaremos que v es supersolución de (5.3). Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $v - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0 y así

$$u(\Phi(x)) - \varphi(x) \geq u(\Phi(x_0)) - \varphi(x_0) \Rightarrow u(y) - \varphi \circ \Phi^{-1}(y) \geq u(y_0) - \varphi \circ \Phi^{-1}(y_0),$$

con y=$\Phi(x)$ e $y_0 = \Phi(x_0)$.

Por tanto, $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \Phi^{-1}$ es una función test que toca por abajo a u en y_0. Aplicando nuestra hipótesis de partida de que u es supersolución viscosa (recordemos que u es solución viscosa), podemos concluir con $u = v \circ \Phi^{-1}$ y

$$D\tilde{\varphi}(y) = D(\Phi^{-1})^T(y) D\varphi(\Phi^{-1}(y)).$$

□

Nota 5.2. *Nótese que no es necesario asumir ninguna condición sobre el difeomorfismo Φ (únicamente la regularidad necesaria).*

Nota 5.3. *Existe una propiedad similar para las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, pero la fórmula es mucho más complicada. La idea es siempre derivar la ecuación heurísticamente. Entonces, si tenemos un difeomorfismo lo suficientemente suave, aplicando el resultado para soluciones clásicas, obtenemos trivialmente el correspondiente para soluciones viscosas.*

5.3 Aplicaciones del Método de Perron

En esta sección mostraremos un ejemplo en el que aplicaremos el Método de Perron previamente estudiado y daremos una visión general de varios problemas en los que podemos usarlo.

Ejemplo 5.1: Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u + G(x, Du, D^2u) = 0 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.4}$$

donde Ω es un conjunto abierto y G es elíptica degenerada. A veces, podemos tomar una opción sencilla para $\overline{u}$ o $\underline{u}$. Si tomamos $G(x, 0, 0) \leq 0$ con $x \in \Omega$, entonces $\underline{u} \equiv 0$ es subsolución viscosa ya que cumple trivialmente la definición.

Para aplicar el método de Perron, bastará encontrar una supersolución no negativa. Para ello, estudiaremos en la frontera y en el interior de Ω. Así, una supersolución cerca de la frontera será:

$$u_1(x) = M \cdot (1 - e^{-\lambda d(x)}),$$

donde M, $\lambda > 0$ que determinaremos más adelante y

$$d(x) = \inf_{y \in \Omega} |y - x|$$

es la distancia a $\partial\Omega$.

Dado $\gamma > 0$, tomemos el conjunto $\Omega_\gamma = \{x \in \Omega : d(x) < \frac{1}{\gamma}\}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} u_1(x) + G(x, Du_1(x), D^2u_1(x)) \geq & G(x, \lambda \cdot M \cdot e^{-\lambda d(x)} D(d(x)), \lambda \cdot M \cdot e^{-\lambda d(x)} D^2(d(x)) \\ & - \lambda^2 \cdot M \cdot e^{-\lambda d(x)} \cdot (Dd(x) \otimes D(d(x))), \end{aligned}$$

en Ω_γ y $p \otimes q$ es la matriz con elementos $p_i q_j$, es decir, el producto tensorial.

Si $x \in \Omega_\lambda$, entonces $\lambda \cdot d(x) \leq 1$ y

$$e^{-1} \leq e^{-\lambda d(x)} \text{ en } \Omega_\lambda.$$

Así, tomaremos $M > 0$ de manera que

$$M(1 - e^{-1}) + G(x, 0, 0) > 1 \text{ en } \Omega. \tag{5.5}$$

Esto se cumple puesto que $G(x, 0, 0)$ es una función continua en $\overline{\Omega}$ y, por tanto, acotada.

Así, podemos afirmar que existe $\lambda > 0$ lo suficientemente grande de manera que

$$G(x, \lambda c D(d(x)), \lambda c D^2(d(x)) - \lambda^2 c Dd(x) \otimes Dd(x)) \geq 0$$

$$\text{Para } x \in \Omega_\lambda, M \cdot e^{-1} \leq c \leq M,$$

donde c es una constante positiva.

Por hipótesis, u_1 es una función $C^2(\Omega)$ que satisface $u + G(x, Du, D^2u) \geq 0$ en Ω_λ y $u_1 = 0$ en $\partial\Omega$.

Para completar la construcción, hemos de elegir $c > 0$ de manera que

$$c + G(x, 0, 0) \geq 0 \ \text{ en } \Omega, \tag{5.6}$$

y

$$0 < c < M(1 - e^{-1}). \tag{5.7}$$

Esto es posible por (5.5). Así, podemos afirmar que $\overline{u}$ es definida de la siguiente forma

$$\overline{u} = \begin{cases} \text{mín}\{u_1, c\} & \text{en } \overline{\Omega_\lambda}, \\ c \ \text{ en } \Omega \backslash \overline{\Omega_\lambda}, \end{cases} \tag{5.8}$$

que es supersolución, como queríamos, además de $\overline{u} = 0$ en $\partial\Omega$ (que es trivial). La constante c es supersolución por la condición (5.6) y el subconjunto de $\overline{\Omega_\lambda}$ en el que $u_1 = c$ no se satisface en $\partial\Omega_\lambda$ (por (5.7), $u_1 = 0$ en $\partial\Omega$ y $u_1 = M(1 - e^{-1})$ cuando $d(x) = 1$).

Concluimos aplicando la propiedad de que las supersoluciones son locales y cerrado bajo mínimos finitos. ∎

En otros casos, la función G es de la forma

$$G(x, p, X) = -\text{traza}(A(x)X) + < b(x), p > -f(x), \tag{5.9}$$

donde A, b, f son funciones continuas.

A continuación, mostramos un ejemplo que pone de manifiesto esta última aclaración.

Ejemplo 5.2: Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u - \triangle u = f(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.10}$$

En este caso, la función G viene definida de la siguiente forma

$$G(x,p,X) = -\text{traza}(X) - f(x),$$

con $A(X) = Id$ y $< b(x), p >= 0$.
Hemos de probar que

$$-\text{traza}(\lambda c D^2(d(x)) - \lambda^2 c Dd(x) \otimes Dd(x)) \geq 0.$$

Así, para $x \in \Omega_\lambda$ y $Me^{-1} < c < M$ se tiene:

$$\frac{\lambda c}{\lambda^2} \cdot (-\text{traza}(D^2 d(x))) + \frac{\lambda^2 c}{\lambda^2} \text{traza}(Dd(x) \otimes Dd(x)) - \frac{f(x)}{\lambda^2} \geq 0.$$

■

6 Conclusiones

A modo de conclusión, recordemos los objetivos planteados:

1. Introducir el concepto de solución viscosa, aplicado a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden
2. Describir el método de Perron para la existencia de soluciones viscosas

A lo largo de este trabajo, se ha podido desarrollar una capacidad de abstracción para comprender y plasmar los conceptos y demostraciones desarrolladas. Dicha capacidad de abstracción ha sido adquirida a lo largo del grado en las diversas asignaturas. Además, se han aplicado conceptos que han sido vistos, en mayor o menor profundidad, a lo largo del grado en las asignaturas de la rama de *Análisis Matemático* (en su mayor medida), así como conceptos básicos de *Análisis numérico* como la estabilidad y consistencia de un problema.

El trabajo se ha basado en el estudio de las soluciones viscosas de ecuaciones en derivadas parciales, que fueron introducidas y estudiadas en el grado en la asignatura de *Ecuaciones de la Física Matemática*, lo cual ha permitido ampliar los conocimientos logrados en dicha asignatura con un enfoque más abstracto y dirigido a la iniciación a la investigación.

Para lograr dichos objetivos y poder relacionarlos con el *Grado en Matemáticas* se ha realizado una amplia búsqueda bibliográfica. Gracias a dicha búsqueda se ha podido lograr una capacidad de selección de información y síntesis de la misma. También ha servido para estudiar un tema relativamente nuevo y por tanto, de inicio a la investigación.

Por último, gracias a lo expuesto a lo largo del trabajo y lo mostrado en estas conclusiones, se puede afirmar que se han cumplido los objetivos propuestos.

Bibliografía

[1] G. Barles, P. E. Souganidis, *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations*. Asymptotic Analysis, vol. 4, no. 3, pp. 271-283, 1991.

[2] A. Briani, *Notes on viscosity solution for partial differential equations*. Dublin City University, January-March 2002.

[3] L. A. Caffarelli, X. Cabré *Fully nonlinear elliptic equations*. Amer. Math. Soc. Vol 43. (1995).

[4] M. G. Crandall, L. C. Evans, P. L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), no. 2, 487-502.

[5] M. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Amer. Math. Soc. Vol. 27, July 1992.

[6] M. G. Crandall, P. L. Lions *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), no. 1, 1-42.

[7] F. Dragoni, *Introduction to Viscosity Solutions for Nonlinear PDEs*.
https://www.researchgate.net/profile/Federica_Dragoni2/publication/265205490_Introduction_to_Viscosity_Solutions_for_Nonlinear_PDEs/links/55197bb20cf244e9a4577e1b/Introduction-to-Viscosity-Solutions-for-Nonlinear-PDEs.pdf

[8] L. C. Evans, *On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods*. Israel J. Math. 36 (1980), no. 3-4, 225-247.

[9] H.Ishii, *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Mathematical Journal, June 1987.

[10] H. Ishii, P. L. Lions, *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*. June 6, 1988.

[11] R. Jensen, *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations*. Arch. Rational Mech. Anal. 101 (1988), no. 1, 1-27.

[12] O. Perron, *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für* $\Delta u = 0$. Math. Z. 18 (1923), no. 1, 42-54.