Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen XIV. Número 2 — 28 de enero de 2021

Judit Muñoz, premiada en 2020
Fuente: Fundación BBVA

Jóvenes investigadoras galardonadas con el Premio Vicent Caselles

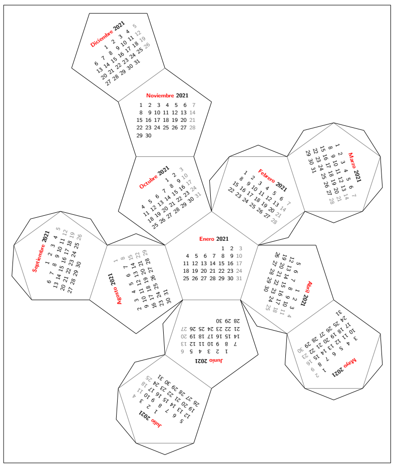
El papel de la mujer es cada día más relevante en el mundo matemático. Obviadas durante mucho tiempo, actualmente se está haciendo más visible su papel en nuestra ciencia.

En este artículo se presentan las mujeres galardonadas en el *Premio Vicent Caselles* que otorga desde 2015 la *Fundación BBVA* en colaboración con la RSME a jóvenes talentos matemáticos.

De los 30 premiados hasta el momento, 11 han sido mujeres. Os invitamos a conocerlas un poco mejor.

(Artículo completo en la página 15)

Año nuevo, ecuación de Pell nueva



La ecuación de Pell es bien conocida en el ámbito matemático. Se trata de una *ecuación diofántica* de la forma $x^2 - ny^2 = 1$. El problema consiste en la búsqueda de soluciones enteras para x e y dado algún valor de $n \in \mathbb{Z}$.

La solución general es compleja y excede los objetivos de este boletín. Sin embargo, Miguel Martínez Teruel, estudiante del grado en Matemáticas, nos plantea una solución sencilla a este problema contextualizado al año que comenzamos, 2021.

(Artículo completo en la página 17)

Resumen

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

Editorial: Ser o no ser

Probablemente el inicio del monólogo de Hamlet en la celebérrima obra de Shakespeare sea una de las escenas más comunes en el imaginario colectivo: *«To be or not to be, that is the question»*. Planteada en el entorno pandémico en el que nos encontramos, el dilema existente entre la voluntad y la realidad se nos presenta a diario en el ámbito académico.

La situación actual nos está obligando a evitar al máximo posible el contacto social. Mientras no se consiga inmunizar a una parte importante de la población estamos, de alguna forma, «condenados» al aislamiento. Por suerte, en esta generación disponemos de herramientas que nos permiten mitigar ese aislamiento. La informática y las redes han venido a paliar, al menos parcialmente, las distancias interpersonales.

Pero, ¿es suficiente?, ¿qué consecuencias va a tener en la formación de nuestros estudiantes?, no lo sabemos, el tiempo nos lo dirá.

El dilema está, como en el soliloquio de Hamlet, entre la voluntad y la realidad, cómo compaginar salud con formación. Aún sabiendo de la importancia de la relación presencial enseñante–estudiante, ¿es posible ofrecer una formación sólida en matemáticas sin la interacción directa entre el profesorado y el alumnado? Esa es la cuestión.

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

Actividades matemáticas

Entrega del premio del Boletín

El 18 de diciembre fue entregado el premio del Concurso de Problemas, del número anterior del Boletín, a Juan Francisco Cuevas Rodríguez del *IES Campos de Níjar*. Para ello, se organizó un acto online en el que los editores del Boletín, Juan J. Moreno Balcázar, Isabel Ortiz Rodríguez y Fernando Reche Lorite, actuaron desde la Universidad y se impartió la charla *Las matemáticas en las series de televisión*.

El premiado con sus profesores

Los regalos fueron entregados por su profesora, María del Mar Mateo. También asistieron al acto sus compañeros y la directiva del centro.

LVII Olimpiada Matemática Española

Logo

El 22 de enero se celebraron las pruebas de la Fase Local del Distrito Universitario de Almería correspondientes a la *LVII Olimpiada Matemática Española*.

Esta competición que convoca la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME) va dirigida a estudiantes de Bachillerato y, con carácter excepcional, a estudiantes de cursos inferiores de excelentes capacidades que vayan avalados por su profesorado.

En esta quincuagésimo séptima edición participaron 57 estudiantes de 13 institutos de la provincia.

Esta edición se ha celebrado de forma virtual con cada estudiante en su centro.

European Girls' Mathematical Olympiad 2021

logo

Las alumnas mejor clasificadas en las fases locales de la *Olimpiada Matemática Española*, hasta un máximo de 15, podrán participar en febrero en la prueba de selección del equipo español que representará a España en la décima edición de la *Olimpiada Femenina Europea* (EGMO), que se celebrará del 9 al 15 de abril en Kutaisi (Georgia).

La *European Girls' Mathematical Olympiad* es la única Olimpiada Internacional de Ciencias que se dirige exclusivamente a las mujeres como participantes. Su objetivo es aumentar la proporción de estudiantes mujeres en los equipos participantes de la *Olimpiada Internacional de Matemáticas*.

Su primera edición tuvo lugar en 2012, si bien la participación de España comenzó en 2016.

Más información en *egmo2021.atsu.edu.ge*.

II Jornadas de Puertas Abiertas del Departamento de Matemáticas

Los pasados 30 de noviembre y 1 de diciembre se celebraron las segundas Jornadas de puertas abiertas del Departamento de Matemáticas de la *Universidad de Almería*.

Al igual que en la primera edición, la finalidad de estas jornadas fue la de realizar una puesta en común entre profesores, investigadores y alumnos en relación a las actividades de docencia, investigación, transferencia y divulgación que se realizan en el Departamento.

Dentro de las actividades programadas se incluyeron diversas charlas correspondientes a los premios asociados al plan de mejora del Departamento en sus diferentes modalidades: calidad de la investigación, sexenios de investigación, pósteres docentes y pósteres de investigación.

Fotografía homenaje a nuestros compañeros jubilados

El acto, que se celebró en línea debido a la situación provocada por la pandemia, tuvo un espacio reservado de homenajes a nuestros compañeros recién jubilados: Antonio Serafín Andújar Rodríguez, Florencio Castaño Iglesias y Pedro Martínez González que participaron con tres emotivas charlas sobre su trayectoria profesional. Desde el Boletín aprovechamos para agradecerles toda la actividad desarrollada y su dedicación durante todos estos años en el Departamento.

El programa completo de las jornadas puede verse en la *página web* del Departamento.

ISSN 1988-5318

IX Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales

Como viene siendo habitual, y coincidiendo con la festividad de san Alberto, la Facultad de Ciencias Experimentales de la *Universidad de Almería* celebró el pasado 13 de noviembre la novena edición del *Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales*, un foro de encuentro e intercambio de ideas entre jóvenes investigadores vinculados a las Facultades de Experimentales de cualquier universidad andaluza.

En esta ocasión, la celebración se realizó de forma online pero ha mantenido el formato consolidado de ediciones anteriores, incluyendo comunicaciones tipo «flash» y conferencias plenarias impartidas por investigadores de las cuatro áreas a las que da cabida este encuentro: Biotecnología y Procesos Bioindustriales, Ciencias Aplicadas y Medioambientales, Matemáticas y Química.

En esta edición se otorgaron 7 premios en metálico por valor de 300 euros al mejor póster/presentación, así como 4 premios en metálico por valor de 150 euros a las mejores contribuciones tipo póster. Los premios estuvieron patrocinados por empresas, centros de investigación de la UAL y la Facultad.

Cartel anunciador de la actividad

La conferencia de san Alberto fue impartida por Alfredo Corell, profesor de la *Universidad de Valladolid*, y se tituló *Con la inmunología no se juega*, en ella explicó de forma amena cuáles son las principales líneas de defensa de nuestro organismo.

Más información en *www2.ual.es/isimpos*.

Jornada virtual «Emprendimiento en Ciencias Experimentales»

La Facultad de Ciencias Experimentales de la *Universidad de Almería* y *EmprendeUAL* organizaron el pasado 11 de diciembre la jornada virtual *Emprendimiento en Ciencias Experimentales* con el propósito de acercar y fomentar la cultura emprendedora entre los estudiantes de Ciencias Experimentales, a través de experiencias profesionales reales de 6 egresados.

La jornada contó con la asistencia de más de 80 estudiantes, quienes conocieron de primera mano las competencias necesarias para desarrollar proyectos, tanto de emprendimiento como de intraemprendimiento, una salida natural en los diferentes grados de la Facultad.

El decano de la Facultad de Ciencias Experimentales, Juan José Moreno, junto al director de EmprendeUAL, Carlos Cano, y los 6 ponentes en un momento de la Jornada

La jornada se desarrolló de forma muy dinámica con intervenciones por parte de los ponentes de 20 minutos y posterior turno de preguntas con las que resolvieron las dudas de los participantes, a quienes motivaron para que den el salto al mundo empresarial.

En el ámbito de las Matemáticas participó Javier Suárez de la empresa *RealTrack Systems* con la que la UAL mantiene una estrecha colaboración.

I Jornadas Científicas san Alberto de la Facultad de Ciencias Experimentales

El 27 de noviembre se celebró esta Jornada con ponencias cortas correspondientes a los once premios otorgados por la Facultad a los mejores artículos de investigación publicados en el primer cuartil del *Science Citation Index*.

Desde el Boletín trasladamos nuestra felicitación a todos los premiados y en especial a los matemáticos que obtuvieron cuatro de los premios [1].

Un momento de la actividad

[1] Más información en *news.ual.es/ciencia/la-facultad-de-ciencias-experimentales-de-la-ual-reinventa-la-celebracion-de-san-alberto*.

ISSN 1988-5318

Semana de la Ciencia 2020

Siguiendo la tradición de años anteriores, el Vicerrectorado de Investigación e Innovación, a través de la OTRI (Oficina de Transferencia de Resultados de Investigación), organizó del 5 al 11 de noviembre la *Semana de la Ciencia* 2020.

Debido a la situación sanitaria las actividades tuvieron un marcado carácter *online* pero manteniendo la línea lúdica, divulgativa y didáctica que las ha caracterizado a las ediciones anteriores, encaminadas todas ellas a dar una mayor compresión de la ciencia y una mejor apreciación del impacto que tiene sobre la actividad cotidiana y la mejora de la calidad de vida.

Inauguración de la Semana de la Ciencia 2020

Las matemáticas estuvieron presentes mediante la actividad *Mates en todas partes* y a través de las charlas *Los modelos matemáticos en nuestra vida* y *Los datos en los medios de comunicación*, que se impartieron dentro del espacio *Café con Ciencia*.

Puede verse un resumen de las actividades en la página web *www.ual.es/semanadelaciencia*.

Noche Europea de los investigadores 2020

El pasado 27 de noviembre la web de la *Fundación Descubre* acercó la Ciencia a todos los ciudadanos que, en esta ocasión, sin fronteras físicas han podido disfrutar de la Ciencia que se realiza en cualquier rincón de Andalucía.

¡Cuenta con las mates!

El mayor evento de divulgación científica de Europa contó con una destacada participación de la comunidad científica de la *Universidad de Almería*, aportando 480 investigadores a través de 62 actividades programadas y grabadas en vídeos de 5 minutos, a lo que hay que añadir las más de 33 acciones previas que se realizaron vía *streaming* en medio centenar de institutos de la provincia.

Investigadores del Departamento de Matemáticas de la UAL participaron mediante la actividad *¡Cuenta con las matemáticas!* y *Matemáticas Amigas*. Puedes ver los vídeos en *Actividades en Almería - La Noche Europea de los Investigadores (fundaciondescubre.es)*.

Premio al estudiante Carlos Mendes por su medalla de bronce en las Olimpiadas Matemáticas

La Facultad de Ciencias Experimentales de la *Universidad de Almería* ha querido premiar el esfuerzo y valía del estudiante Carlos Mendes Góngora, matriculado en el Grado en Matemáticas en el curso 2020/21, por alzarse con la medalla de bronce en la última edición de la *Olimpiada Matemática de la RSME* para estudiantes de bachillerato.

El estudiante premiado, Carlos Mendes, acompañado por el decano, el secretario de la Facultad de Ciencias Experimentales, el coordinador del Grado en Matemáticas y el coordinador del grupo de preparación para el certamen olímpico

El reconocimiento se ha materializado con un ordenador portátil. La Facultad de Ciencias Experimentales pretende estimular al resto de estudiantes de bachillerato para que se conviertan en jóvenes talentos de cualquiera de sus titulaciones.

I Encuentro virtual en Diseño Óptimo de Experimentos

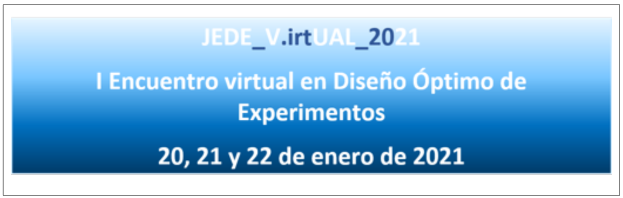
El Grupo de investigación *Análisis de datos* de la *Universidad de Almería* ha organizado en el mes de enero el *I Encuentro virtual en Diseño Óptimo de Experimentos.*

Este encuentro ha surgido por el aplazamiento de la quinta edición del *Congreso de Jóvenes Investigadores en Diseño de Experimentos y Bioestadística*, que estaba previsto celebrar en Almería en junio de 2020. Se espera que en octubre de este año se den las condiciones apropiadas para poder celebrar el congreso de forma presencial.

Los objetivos del encuentro han sido establecer un entorno para compartir conocimiento en Diseño óptimo de

 ISSN 1988-5318

experimentos, dar a conocer el trabajo de los jóvenes investigadores y potenciar la colaboración entre los participantes.



Durante las tres jornadas que ha durado el encuentro han asistido investigadores de diferentes universidades españolas, italianas, de la *Universidad Viña del Mar* de Chile, del *Centro Nacional de Investigaciones Oncológicas* y del *Hospital Ramón y Cajal*.

I Concurso de Monólogos Matemáticos, MaThales Jaén 2020

La *Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales* y la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* convocan el *I Concurso de Monólogos Matemáticos, MaThales Jaén 2020*.

Se trata de un certamen de índole nacional cuyo objetivo principal es el de fomentar la divulgación de la ciencia identificando, formando y dando a conocer nuevos talentos, nuevos portavoces de la ciencia a través de un formato innovador, el monólogo matemático.

El plazo de presentaciones cerró el 20 de diciembre y el 14 de marzo de 2021 se realizarán los actos de presentación. Más información en *thales.cica.es*.

Noticias matemáticas

#NoMoreMatildas

La *Asociación de Mujeres Investigadoras y Tecnólogas* AMIT ha lanzado la campaña *NoMoreMatildas*.

Cartel anunciador de la campaña

Esta campaña es una colaboración altruista de dos agencias de publicidad con AMIT, que ha revisado todos los contenidos, y está dedicada a hacer visibles los logros de las científicas y a ellas mismas.

El vídeo se puede ver en YouTube y en la web *www.nomorematildas.com*.

Día Internacional de las Matemáticas 2021

DÍA INTERNACIONAL DE LAS MATEMÁTICAS 14 DE MARZO

Logo del Día Internacional de las Matemáticas

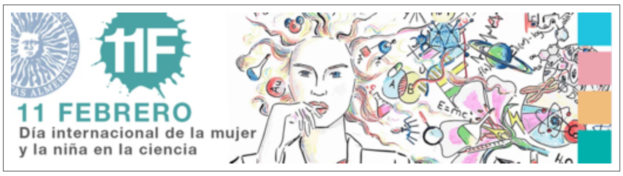
El próximo 14 de marzo se celebrará, en más de 100 países de todo el mundo, el *Día Internacional de las Matemáticas*, proclamado por la UNESCO en noviembre de 2019.

El tema de este año es *«Matemáticas para un mundo mejor»* con el que se enfatiza la importancia de las matemáticas para mejorar la calidad de vida, en claro guiño al papel que están desempeñando en la actual pandemia.

Los eventos programados para esta edición se centrarán así en mostrar cómo las matemáticas son útiles para mejorar diferentes ámbitos de la vida y afrontar retos actuales: la crisis sanitaria, el cambio climático, la organización de la sociedad, las redes de comunicación, etc.

Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia

El 11 de febrero, *Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia*, brinda a la *Universidad de Almería* la oportunidad de sensibilizar a la comunidad educativa sobre un tema de gran interés, como es poner fin al desequilibrio de género en los campos de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (áreas STEM).



Cartel anunciador de la conmemoración

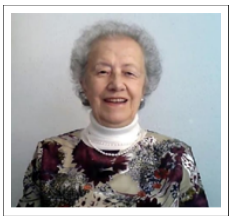
Siguiendo la tradición de años anteriores, el Vicerrectorado de Estudiantes, Igualdad e Inclusión está organizando distintas actividades de divulgación y concienciación en los centros educativos de toda la provincia de Almería, que se desarrollarán de manera virtual durante el período comprendido entre el 11 de febrero y 8 de marzo.

Científicas e investigadoras de la Universidad de Almería contarán su experiencia de vida con el fin de ayudar a visibilizar el trabajo de las mujeres científicas, crear roles femeninos en las áreas de conocimiento STEM, y promover prácticas que favorezcan la igualdad de género en el ámbito científico.

V Premio Julio Peláez

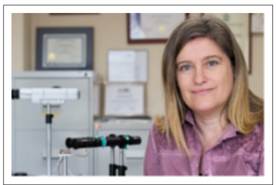
La Fundación *Tatiana Pérez de Guzmán el Bueno* ha otorgado el *V Premio Julio Peláez a las Mujeres Pioneras de la Física, la Química y las Matemáticas* a María Josefa Yzuel y a Susana Marcos.

Con este reconocimiento *ex aequo*, la Fundación ha querido reconocer el talento de los mayores y resaltar la importancia de la investigación para hacer frente a los problemas de salud que amenazan a la sociedad, que se refleja en aplicación de las premiadas a la óptica médica.



María Josefa Yzuel

María Josefa Yzuel, catedrática emérita del Departamento de Física de la *Universidad Autónoma de Barcelona*, ha sido pionera en la incorporación de la mujer al ámbito de la física en España y ha recibido este premio por sus brillantes logros en el campo de la óptica, como la mejora de las imágenes diagnósticas en medicina.



Susana Marcos

Susana Marcos, profesora de investigación del CSIC, destaca por sus investigaciones en óptica aplicada y el estudio del ojo humano con herramientas procedentes de la astronomía. Ha desarrollado un simulador que permite a pacientes de cataratas y presbicia experimentar el resultado de la implantación de lentes intraoculares, cirugía refractiva o adaptación de lentes de contacto antes de la operación. Entre los premios recibidos, cabe mencionar el premio Nacional de Investigación en 2019, el máximo galardón en investigación que concede el Gobierno español.

Premios de Investigación Matemática Vicent Caselles

Cartel anunciador

La *Fundación BBVA* y la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME) convocaron el pasado 14 de diciembre la séptima edición de los *Premios de Investigación Matemática Vicent Caselles*.

Estos premios nacieron en 2015 con el objetivo de reconocer y estimular la creatividad, la originalidad y el logro en el campo de las matemáticas de jóvenes investigadores menores de 30.

En esta convocatoria se concederá un máximo de seis premios, cada uno con la dotación de 2000 euros, todos ellos en la modalidad de Investigación Matemática. El plazo de presentación de candidaturas estará abierto hasta las 14:00 horas del 1 de marzo [2].

Becas Leonardo a Investigadores y Creadores Culturales Fundación BBVA

La *Fundación BBVA* lanzó el pasado 15 de diciembre una nueva convocatoria de las *Becas Leonardo a Investigadores y Creadores Culturales*.

Este programa de fomento de la ciencia y la cultura que la *Fundación BBVA* puso en marcha en el año 2014 tiene como objetivo principal apoyar de manera directa el desarrollo de proyectos personales de investigadores y creadores culturales de entre 30 y 45 años que, encontrándose en estadios intermedios de su carrera, desarrollen una producción científica, tecnológica o cultural altamente innovadora.

Cartel anunciador

En esta convocatoria se concederán al menos 55 becas, dotadas cada una de ellas con un omáximo de 40 000 euros. El plazo de presentación de candidaturas estará abierto hasta las 19:00 horas del 25 de febrero [3].

Premios Rei Jaume I 2021

Desde 7 de enero y hasta el 5 de abril se encuentra abierto el plazo para la propuesta de candidatos a los *Premios Rei Jaume I 2021*.

Estos premios están dirigidos a las personas físicas que hayan contribuido al desarrollo de la ciencia básica en España y cuya investigación haya tenido un impacto de gran relevancia en cualquiera de los campos de la Física, la Química y las Matemáticas.

Los *Premios Rei Jaume I* se crearon en 1989 con el objetivo de aunar, en estudios e investigación, a entidades científicas y empresariales para la promoción de la investigación, el desarrollo científico y el emprendimiento en España.

Sus seis galardones, dotados con 100 000 euros cada uno, los convierte en uno de los mejor remunerados del país [4].

[2] *www.fbbva.es/premios/premios-investigacion-matematica-vicent-caselles-2021*.
[3] *www.redleonardo.es/becas/becas-leonardo-investigadores-creadores-culturales-2021*.
[4] *www.fprj.es/es/convocatoria*.

 ISSN 1988-5318

Olimpiada matemática Thales 2021

La *SAEM Thales* ha anunciado que *la Olimpiada Matemática Thales* para el alumnado de 2.º de ESO se celebrará online el sábado 20 de marzo de 2021.

En breve publicarán las bases actualizadas a esta nueva circunstancia y se comunicarán los plazos de inscripción. Más información en *thales.cica.es*.

Preguntas frecuentes

Si soy estudiante del Grado en Matemáticas, ¿cómo puedo iniciarme en tareas de investigación?

Para la iniciación en tareas de investigación relacionadas con los estudios que se están cursando existen unas ayudas del Ministerio de Educación y Formación Profesional llamadas Becas de colaboración de estudiantes en Departamentos.

Estas ayudas se pueden obtener en un único curso académico y están destinadas a estudiantes de grado que a la fecha de finalización del plazo de presentación de solicitudes estén matriculados en todos los créditos restantes para completar el título y que hayan superado el 75 % de la carga lectiva del grado.

Para la rama de Ciencias deben haber obtenido una nota media de los créditos superados de 7,70. Asimismo, pueden solicitar esta beca estudiantes del primer curso de másteres oficiales. Se debe presentar un proyecto de colaboración dentro de alguna de las líneas de investigación del departamento solicitado. Este proyecto deberá venir avalado y valorado por el departamento.

Durante el curso académico 2020/21, tres becarios de colaboración disfrutan de estas ayudas en el Departamento de Matemáticas de la UAL.

¿Qué grupos de investigación de la UAL tienen como responsables a profesores del Departamento de Matemáticas?

Los grupos de investigación de la UAL están reconocidos por la Junta de Andalucía y sus líneas de investigación abarcan todos los sectores estratégicos del tejido productivo.

En el área temática de Física, Química y Matemáticas los siguientes grupos de investigación están liderados y compuestos por miembros del Departamento de Matemáticas de la UAL: Análisis de datos (FQM244), Análisis matemático (FQM194), Categorías, computación y teoría de anillos (FQM211), Modelos aleatorios y diseño de experimentos (FQM228), Teoría de aproximación y polinomios ortogonales (FQM229) y Teoría de cópulas y aplicaciones (FQM197).

También hay miembros del Departamento que pertenecen a grupos de investigación de otras áreas en los que se aplican las matemáticas a temáticas como la agricultura, la economía o la informática.

Si soy Graduado en Matemáticas, ¿puedo continuar con mi formación en la UAL?

Sí, la UAL oferta el Máster en Matemáticas que proporciona a los estudiantes una formación matemática avanzada de gran nivel, de carácter especializado y multidisciplinar. Se trata de un Máster de carácter interuniversitario en el que participan las Universidades de Almería, Granada, Málaga, Jaén y Cádiz.

Ofrece la posibilidad de realizar tres tipos de especialidad: una orientada a iniciarse en la investigación, otra orientada a la docencia en matemáticas en Enseñanza Secundaria y una tercera orientada para los estudiantes que estén interesados en conocer las aplicaciones de las matemáticas en la empresa.

Todas las asignaturas son optativas, a excepción de las Prácticas externas y el Trabajo Fin de Máster, de manera que también es posible combinar indistintamente asignaturas de las tres especialidades para completar el programa (60 créditos) de 1 año de duración.

Este título da acceso al periodo de investigación del doctorado en Matemáticas. Las materias ofertadas se reconocen como el periodo de docencia del Doctorado.

Asimismo, la UAL oferta el Máster en Profesorado de Educación Secundaria con la especialidad en Matemáticas. La duración del programa es de 1 año (60 créditos). Esta titulación de postgrado aporta la formación pedagógica y didáctica que habilita para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Es un requisito imprescindible para acceder a los cuerpos docentes correspondientes.

Actualmente es posible cursar simultáneamente estos dos másteres a través del Doble Máster en Profesorado de Educación Secundaria y en Matemáticas. Para la obtención de este doble título la UAL ha proyectado un itinerario que hace factible la consecución de estos dos títulos de máster en un periodo de 3 semestres.

ISSN 1988-5318

ENSEÑANZA SECUNDARIA

Aprendizaje cooperativo en un centro de difícil desempeño para la mejora del rendimiento académico y de la convivencia

Rocío Torres Camacho
IES Santa María del Águila (El Ejido, Almería)

Aprendizaje cooperativo en grupos de trabajo

En el instituto de Santa María del Águila, durante los cursos 18/19 y 19/20 se desarrollaron varias *Unidades Didácticas Integradas* (UDIs) dentro de la formación en grupos de trabajo coordinados por el CEP de referencia. En dichos grupos participaron docentes de distintas materias, y se enfocaron en el primer ciclo de la ESO.

El objetivo principal de estas UDIs fue preparar un material útil para años posteriores y que permitiese presentar parte de los contenidos de forma más atractiva. Como consecuencia de esto, se pretendía ayudar al alumnado que, por motivos de diversa índole se encontraba descolgado, a reconectar con el curso escolar, y permitir su integración dentro del grupo, mejorando de esta forma el ambiente dentro de clase y por tanto la convivencia en el aula.

Conforme fue pasando el tiempo, los participantes de este proyecto nos dimos cuenta de un par de aspectos importantes:

- Es demasiado ambicioso elaborar UDIs que impliquen a varios departamentos en centros con una alta rotación del profesorado, ya que es complicado garantizar su continuidad para años siguientes.
- Es esencial abordar las UDIs desde un punto de vista metodológico, empleando estrategias de aprendizaje cooperativo que se puedan llevar a cabo en el aula.

Puesta en práctica de una UDI: Somos escultores

Como ejemplo de UDI, presento la realizada por el departamento de matemáticas, del cual formo parte. Esta, sirvió para presentar y desarrollar los temas de Geometría del libro en una sola unidad. Se llevó a cabo en el último trimestre del curso, cuando el interés hacia la asignatura empieza a caer en picado, y el alumnado más disruptivo hace que dar clase de una forma más tradicional sea complicado.

En esta unidad, se combinaron explicaciones teóricas con actividades manipulativas y tareas que debían realizar organizados en equipos, usando distintas técnicas colaborativas sencillas, como *«Lápices al centro»*, *«Estructura 1-2-4»* o *«Uno por todos»* (Pujolàs, 2003).

A lo largo de todo el curso ya se habían hecho actividades puntuales, usando estas técnicas de trabajo en grupo. Esto facilitó su puesta en funcionamiento, pues ya estaban familiarizados con esta metodología.

La UDI se desarrolló durante un total de 14 sesiones, donde se trabajaron contenidos generales, así como otros más específicos del bloque de geometría:

- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes.
- Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.

Para su posterior evaluación, se elaboró una rúbrica donde se contemplaron tres criterios de evaluación, uno de carácter transversal y dos de geometría:

- Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
- Analizar distintos cuerpos geométricos e identificar sus elementos característicos.
- Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.

Lo más interesante del desarrollo de la UDI fue la realización de un proyecto conjunto, donde cada clase debía realizar un superhéroe, a base de cubos de distintos colores, que después sería exhibido en el hall del instituto durante la semana cultural a finales de mayo.

A través de estos cubos que iban fabricando con folios, se refrescaron e introdujeron nuevos conceptos relacionados con área y volumen. Finalmente, se calculó el área y

ISSN 1988-5318

el volumen de los superhéroes realizados. Obviamente, se repasaron y se realizaron ejercicios con otras figuras geométricas, pero el cubo fue la base para desarrollar el resto de contenidos.

Se realizaron un total de 4 superhéroes, y el mayor beneficio que sacó el centro de la realización de este proyecto es que ciertos alumnos, que frecuentemente eran expulsados al aula de reflexión por ser especialmente disruptivos, mostraron gran interés en participar en la realización de este trabajo manipulativo, mostrando su faceta más colaborativa y relajada.

Por lo tanto, uno de los objetivos fundamentales que era la mejora de la convivencia se logró más allá de lo esperado, puesto que la repercusión no se redujo al grupo donde se estaba llevando a cabo la UDI, sino que trascendió fuera de estas aulas.

El futuro de esta línea de aprendizaje

Durante el presente curso escolar no se le ha dado continuidad a este trabajo debido al cambio en el tipo de enseñanza por la situación de pandemia que estamos atravesando. Ahora mismo, el trabajo en equipo no parece ser lo más apropiado pues hay que mantener la distancia social entre el alumnado.

No obstante, para futuros cursos está la idea de poder realizar este tipo de experiencias, donde sea necesaria la colaboración de toda una clase, para la realización de algún pequeño proyecto donde sea necesario el uso de herramientas digitales, aprovechando que el alumnado está aprendiendo, a marchas forzadas, a hacer uso de ellas.

Referencias

[1] Pujolàs, P. (2003): Programa para enseñar a trabajar en equipos cooperativos en la enseñanza Secundaria Obligatoria. Documento de trabajo. Laboratorio de Psicopedagogía. Universidad de Vic.

■

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

Teaching Maths through Foreign Language Teaching Strategies

Daniel Prados Torrecillas
Responsable Provincial de Plurilingüismo.
Delegación Territorial de Educación y Deporte en Almería

The regulations for bilingual education in Andalusian schools are set off in the *Orden* of June 28, 2011. This binding document states that all bilingual schools must promote the acquisition and development of their students' linguistic competence by adopting the *Content and Language Integrated Learning* methodological approach (hence CLIL) and developing or adapting all the necessary teaching materials. This means that, in bilingual programmes, teaching through CLIL is compulsory for the participant teachers, which in turn implies two small details: (1) teachers must know about CLIL and (2) they must know how to generate CLIL materials.

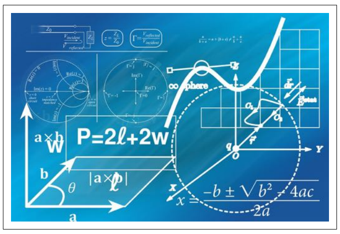
As regards the first detail, obvious though it may seem, not all the teachers that participate in a bilingual programme know about CLIL, or at least not enough. This is hardly surprising: learning the rudiments of this methodological approach should take at least a few sessions in a properly well-structured in-service training course. Secondly, if they do not know enough about CLIL, they will surely find it quite hard to adapt existing teaching materials so that they suit the principles of CLIL, let alone create them directly. Therefore, learning about CLIL and how to make the most of it to generate suitable CLIL materials requires time and devotion.

Nonetheless, the purpose of this section is not to make things difficult for Maths teachers in bilingual programmes, but to make their work easier. So let us assume that Maths teachers do not have time for proper training. In that case, programme coordinators should be able to explain the participant teachers what is CLIL in a few words —namely, what is it that they must know first and foremost about CLIL— and give them some quick tips during their coordination time. Then it is up to them to go on searching the web for articles, videos and examples of activities, if they have time.

So what is CLIL? What is the most important thing about CLIL that all Maths teachers participating in the programme should know? Quite simply, CLIL is an integrating approach that involves teaching a content subject through a foreign language, so that the students learn both the content and the target language (hence L2) at the sa-

 ISSN 1988-5318

me time. To put it bluntly, it is like hitting two birds with one stone. For a Maths teacher, this double focus means teaching Maths while indirectly teaching the L2 (i.e. English, French or German) in a communicative way, by using foreign language teaching (hence FLT) strategies and proposing activities that require the students' active use of their communicative skills, much in the same way as a foreign language teacher would do.



A Maths teacher is not usually familiar with such FLT strategies, particularly in the first stages, so they need to rely on CLIL materials. As these are scarce and do not normally suit the contents of the unit they are teaching, they need to design new material or adapt what they have, which in turn can be time-consuming. Indeed, though it is a good idea to develop CLIL materials (this is what the *Orden* above says they must do), they do not usually have enough time to produce quality materials for every lesson. Consequently, the participant teachers should be given certain guidelines in order that they can develop their own FLT strategies and use them *systematically* in their CLIL lessons.

In general terms, we may point out here 10 strategies for Maths teachers to start developing a systematic way of teaching their subject as if it were a linguistic subject:

1. Give all directions (classroom language) in the L2.

2. Make yourself understood by your students: repeat key words, pronounce them with emphasis, use body language and visual aids.

3. If necessary, translate a difficult word or concept into Spanish. It is a bilingual programme, so there is nothing wrong in using the L1 on occasion.

4. Teach in a natural way; don't explain grammar. If you want your students to become aware of a certain grammatical structure, point it out or highlight it on the board, give several examples, allow your students to infer the grammar rule behind without explaining it.

5. Anticipate specific vocabulary or target expressions before tackling a new unit, text or activity. Use language sidebars on the board, show flashcards, pin up permanent posters on the walls.

6. Integrate all four language skills. Make sure every Maths lesson contains activities in which your students have to listen, speak, read and write in the L2.

7. The students are at the centre of the teaching process, not the teacher, so allow them to participate actively. Ask them questions, but let them ask questions, too.

8. Let students work in groups, so they solve word problems and carry out other activities together, as a team.

9. Bring the outside world in the classroom. If you have ICT means, use audio-visual content that is available on the web or tell your students to watch it at home. Set a few previous comprehension questions and there you have it!

10. Set task-based activities and small projects that require the use of the L2. Tell your students to explain mathematical concepts or give presentations to their peers.

In the next issues we will try to offer deeper explanations and specific examples of these strategies. For the time being, the following examples may be enough to get the picture:

1. Use such classroom expressions as *"listen carefully, turn to page 27, put away your calculators, let's work in pairs now . . . "* systematically.

2. Put special emphasis on the diphthong in *binary* and *binomial*.

3. Mathematical terms are usually very similar in both Spanish and L2, so there is no need to translate *equation* or *prime number*. However, you may need to give the precise translation into Spanish of such terms as *power* or *set*, since these words have several possible translations.

4. Point out the structure of conditional sentences when they come up in a Maths problem by just circling the word *"if"* and underlining the verb phrases.

5. When teaching fractions, you can show an example on the board, isolate the terms *numerator* and *denominator*, make sure the students pronounce them correctly with the classic *listen-and-repeat*, and then have them match the terms to their definitions.

6. A lesson on, say, integer numbers should contain some form of oral interaction between the teacher and the students, e.g. through a brainstorming activity to introduce numbers, operations and symbols; listening to the teacher and/or a video, reading a text on integers that may contain a fill-in-the-gaps activity and/or true-false or multiple choice comprehension questions, and practising with written exercises.

7. Have your students write their own word problems and present them to their peers, so they listen and try to find the solution.

8. You may wish to set a group of three to five students and assign specific roles, so they work as a team to make up a word problem.

 ISSN 1988-5318

9. Tell your students to watch this video about fractions: *youtu.be/HBN568uvxi4* and answer this question: *What do the values of fractions depend on?*
10. Students can prepare a PPT slideshow about geometrical objects and give a presentation to the class, which may contain two or three questions to check their peers' comprehension.

At this point, it is important to count on the programme coordinator's advice and support, alongside that of the foreign language teachers. Therefore, to these kick-off tips I would add yet another one: seek their advice; ask them how they would teach a certain content or topic from a linguistic, communicative perspective. The aim is not to spend hours preparing one-off activities, since we cannot spend that amount of time for every lesson, but rather be efficient and develop a regular, permanent, systematic way of teaching Maths that meets the principles of CLIL and therefore the demands of the bilingual programme. After all, every teacher is a language teacher. ■

Concurso de problemas

Problema propuesto

Las últimas clases de don Andrés

A punto ya de jubilarse, conservaba su pasión por la docencia y había desarrollado aun más su característico tono paternal:

«Como podéis observar, mis queridos estudiantes, la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ *representa una esfera de radio* 1 *centrada en el origen. De hecho, las soluciones de tal ecuación son los puntos del espacio euclídeo tridimensional que se encuentran a distancia* 1 *del punto* $(0,0,0)$*. De forma análoga, la ecuación* $z=0$ *puede identificarse con el plano* XY*, pues las soluciones de esta última ecuación son los puntos de la forma* $(t,s,0)$*, siendo* t *y* s *números reales cualesquiera. Puesto que las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

son los puntos que pertenecen, simultáneamente, a la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ *y al plano* $z=0$*, cabe decir que el sistema mencionado representa la intersección de ambas superficies. Se trata, en este caso, de una circunferencia situada en el plano* XY*, de radio* 1*, centrada en el origen.*
Os propongo un ejercicio que admite una respuesta que os dejará plenamente satisfechos. Os animo a resolver el sistema

$$\begin{cases} y^2-x^2-2yz+z^2=0 \\ y^2-x^2-2xz=0 \end{cases}$$

En términos geométricos, acabo de invitaros a descubrir la intersección de la superficie $y^2-x^2-2yz+z^2=0$ *con la superficie* $y^2-x^2-2xz=0$*»*

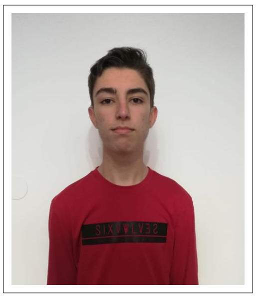
Os rogamos que aceptéis, en esta ocasión, la propuesta que hizo don Andrés a sus estudiantes en la clase que hemos rememorado.

Si nos envías tu solución a este problema ***puedes obtener*** un estupendo ***reloj inteligente (smartwatch)*** y un regalo relacionado con las matemáticas.
¡La solución más elegante u original tiene premio!
Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico bmatema@ual.es ***hasta el 15 de abril***.
Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.
Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

ISSN 1988-5318

Resultado del concurso del número anterior



Ismael Vergara

Víctor Hasu

En este número del Boletín, el jurado ha decido otorgar dos premios, ya que el problema propuesto se dividía en dos apartados diferentes.

El primero se otorga a Ismael Vergara García, alumno de 4.º de ESO del *IES Las Marinas* por su solución al apartado del ángulo de tiro y el segundo a Víctor Hasu García, estudiante de 2.º de Bachillerato del *IES El Palmeral* de Vera, por la solución del apartado de divisibilidad.

Problema propuesto en el número anterior

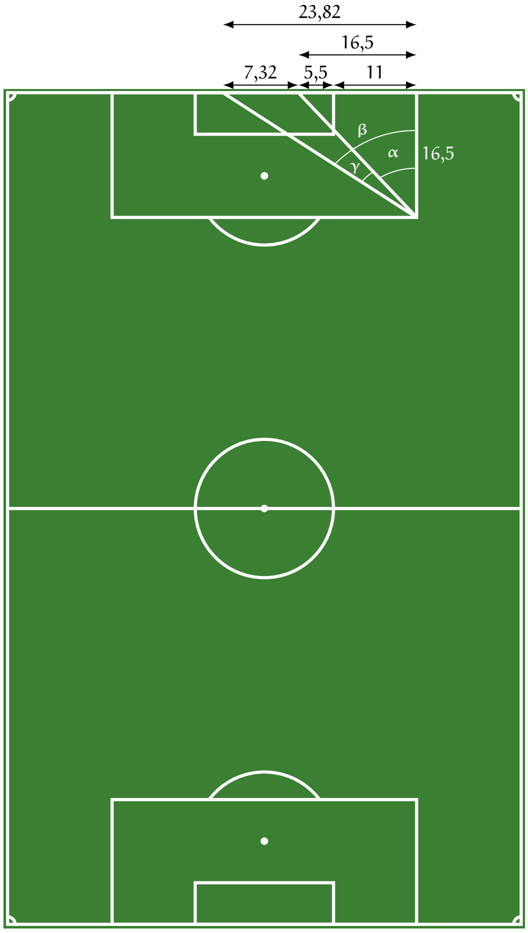
Ana y Juan comparten gustos por las matemáticas y el fútbol. Además, Ana juega en la división femenina de la UD Almería. Justo antes de empezar un partido televisado de la UD Almería están intentando probar un criterio de divisibilidad por el número primo 31. Nada más empezar el partido, Lazo, jugador del Almería, realiza un disparo a puerta raso justo desde la esquina derecha del área grande. Ana se pregunta: ¿qué ángulo de disparo tiene?, ¿lo sabrías tú?

Las dimensiones del Estadio de los Juegos del Mediterráneo son 105×68 metros. El resto de datos de un campo de fútbol lo puedes encontra fácilmente en Internet.

Por cierto, entre Ana y Juan probaron en el descanso del partido un criterio de divisibilidad por el 31 que dice *«Un número es divisible por 31 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 3 y restar a las cifras restantes, el resultado es múltiplo de 31»*. Por ejemplo, el 341 es divisible por 31 ya que $34 - 3 \cdot 1 = 31$ que claramente es divisible por 31. ¿Sabrías probar este criterio?

Solución de Ismael Vergara a la primera parte:

El esquema en el terreno de juego, considerando las dimensiones del campo de fútbol de la situación requerida en el problema es el siguiente:



Ahora realicemos los cáculos. En primer lugar calcularemos β:

$$\tan\beta = \frac{23{,}82}{16{,}5} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{23{,}82}{16{,}5},$$

por lo que $\beta \approx 55{,}29°$.

Después calculamos α actuando de la misma forma:

$$\tan\alpha = \frac{16{,}5}{16{,}5} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} 1,$$

por lo que $\alpha = 45°$.

El ángulo γ es la diferencia de los anteriores, es decir, $\gamma = \beta - \alpha$, por lo que el ángulo de disparo es $\gamma = 55,29 - 45 = 10,29°$.

Solución de Víctor Hasu a la segunda parte:

Consideremos la siguiente notación:

$$X = 10B + a,$$

donde X es un número que descomponemos de esa forma, es decir, a es el dígito que representa las unidades de X y B es el número formado por los dígitos de X en su orden original eliminando el dígito de las unidades.

Por poner un ejemplo, para el número 341, tendríamos que $B = 34$ y $a = 1$, por lo que $341 = 10 \cdot 34 + 1$.

 ISSN 1988-5318

Consideremos que $B - 3a$ es divisible por 31, por lo que existe un k tal que $B - 3a = 31k$.

Ahora, multipliquemos por 10, es decir,

$$10B - 30a = 10 \cdot 31k.$$

Si sumamos y restamos a en la parte izquierda de la igualdad, tenemos que

$$10B - 30a + a - a = 310k,$$
$$10B - 31a + a = 310k.$$

Entonces, $X = 10B + a = 310k + 31a = 31(10k + a)$, por lo que X es múltiplo de 31.

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

Andrei N. Kolmogórov

Un matemático excepcional

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Algunos resultados matemáticos han quedado en el imaginario popular ligados a un determinado «apellido». Probablemente si hacemos una pequeña encuesta en la calle, pocas personas desconocerán la existencia del *teorema de Pitágoras* aunque no recuerden su formulación exacta.

A. N. Kolmogórov

Algo parecido nos podemos encontrar cuando hablamos de los *axiomas de Kolmogórov*. Todo aquel que haya recibido un curso básico de probabilidad seguro que tiene en mente —aunque solo sea el nombre— de estos famosos tres axiomas.

En algunos casos estos «apellidos» no corresponden exactamente a quienes elaboraron directamente esos resultados, hecho que no sucede con la figura cuya biografía se pretende glosar brevemente en este artículo: Andrei Nikoláyevich Kolmogórov.

Kolmogórov nació el 25 de abril [5] de 1903 en la localidad rusa de Tambov y falleció el 20 de octubre de 1987 en Moscú.

Su madre murió durante el parto y fue criado por sus tías que regentaban una escuela, por lo que Andrei fue educado con entusiasmo por estas, que fomentaron en el niño la curiosidad y la dedicación al trabajo. En 1910 su tía se trasladó a Moscú donde Kolmogórov continuó su formación en un instituto privado.

La vida de Kolmógorov no fue fácil, perdió el contacto con su padre —desaparecido en el frente en 1919— y tuvo que compatibilizar los estudios con el trabajo en la construcción de la vía ferroviaria Kazan–Ekateringurg.

En 1920 Kolmogórov se matricula en la *Universidad de Moscú* en la facultad de Física y Matemáticas. Simultáneamente, participó como estudiante en un seminario sobre historia antigua rusa, elaborando un informe científico sobre los registros de la propiedad, lo que es una buena muestra de la amplitud de sus inquietudes. Se gradúa en 1925, habiendo publicado 8 artículos de investigación durante su época de estudiante, hecho nada común, y completa su doctorado en 1929.

Kolmogórov es conocido por el gran público por sus contribuciones en el campo de la Probabilidad, pero fue mucho más que eso. Realizó contribuciones extraordinarias en muchos campos de las matemáticas que podríamos sintentizar —de forma no exhaustiva— en los siguientes epígrafes extraídos de [1]:

a) Teoría de funciones, estudiando el comportamiento de series de Fourier, y lógica —intuicionismo y formalismo—.

b) Fundamentos de la probabilidad, con soluciones parciales hasta la aparición de su obra *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad), en donde aparecen sus famosos axiomas.

c) Aplicaciones de la estadística y la probabilidad en el campo de la genética —con una defensa abierta del mendelismo en una época en la que los científicos defensores de esta teoría fueron ferozmente purgados por el estalinismo— y en la modelización de las turbulencias.

d) Sistemas dinámicos y la teoría KAM (Komogórov–Arnold–Moser) donde aborda el problema de los n cuerpos.

e) Teoría de la información y complejidad donde enlaza algoritmo y aleatoriedad.

A partir de los años 60 Kolmogórov tuvo una especial implicación en la enseñanza de las matemáticas, participando en el diseño de los programas de aprendizaje de esta materia en la Unión Soviética, publicando y revisando textos docentes y colaborando en revistas de divulgación con numerosos artículos.

Preparando una charla en 1973. Foto de Terrence L. Fine

[5] 12 de abril en el calendario vigente en Rusia en ese momento, ya que adoptó el calendario gregoriano en 1918.

 ISSN 1988-5318

Aunque los útimos años de su vida se vio afectado por el Parkinson, no dejó de estar activo hasta su muerte. Durante su vida recibió multitud de premios y reconocimientos, tanto en su país como en el extranjero.

Su legado ha sido enorme y me gustaría acabar esta brevísima reseña sobre su figura con unas palabras suyas [2]:

> *«De los profesores de matemáticas, tanto en la escuela media como en la superior, se debe exigir no sólo un conocimiento profundo de su ciencia. Enseñar bien matemáticas sólo puede hacerlo aquel que las ame con pasión y las comprenda como una ciencia viva, en desarrollo»*

Referencias

[1] M. García Piqueras (2017). *Kolmogórov. La dualidad entre el caos y la determinación.* Colección «Genios de las matemáticas», RBA.

[2] C. Sánchez Fernández y C. Valdés Castro (2003). *Kolmogórov. El zar de azar.* Colección «La matemática y sus personales», Nívola.

[3] MacTutor History of Mathematics Archive [6].

■

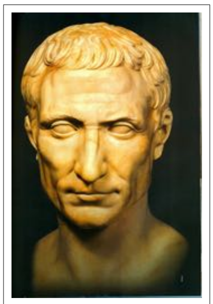
MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

La seguridad: ¿una cuestión de azar?

Juan Antonio López Ramos
Universidad de Almería

¿Cuántas veces a lo largo de los últimos tiempos estamos escuchando casi a diario el concepto de ciberseguridad en diversos contextos? La razón es bien clara: nuestra vida es cada vez más dependiente de procesos y sistemas cibernéticos y, de la seguridad de estos, depende que no nos enfrentemos a problemas que pueden afectar a muy diversas cuestiones y que van desde tener seguro nuestro dinero en el banco, a que podamos encender la luz en casa.

Pues bien, uno de los conceptos más importantes e involucrados en la seguridad de nuestros sistemas de comunicación es la aleatoriedad. Pero, ¿qué es eso de la aleatoriedad?



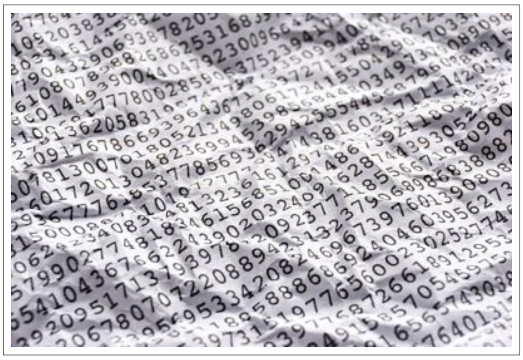
Julio César

Es probable que el lector haya escuchado alguna vez la expresión *«La suerte está echada»*, expresión traducida del latín y que fue pronunciada por Julio César en el momento de declarar la guerra al senado de Roma entrando en Italia al mando de un ejército y que realmente, en latín se escribe como *«Alea jacta est»*, cuya traducción sería algo así como *«El dado está lanzado»*.

La etimología de la palabra aleatorio está, por tanto, ligada al azar y no a la suerte. Permítame un breve inciso en este punto el lector para hacer mención a Julio César como padre del conocido como *criptosistema de César*, y que consiste en aplicar una biyección al abecedario para escribir un texto de forma ininteligible mediante la sustitución de unas letras por otras, con lo que podemos decir que Julio César fue un adelantado también en temas de ciberseguridad, dado que protegía sus informes o cartas de esta forma tan inteligente para aquel tiempo.

Pero volviendo al tema de la aleatoriedad, ¿qué papel juega esta dentro de la ciberseguridad? Veamos solo un par de ejemplos. Cada día es más habitual el uso de la administración electrónica, para lo que necesitamos el DNI electrónico. Este DNI electrónico contiene un algoritmo de firma cuya seguridad, es decir, la imposibilidad de falsificar dicha firma y, por tanto, la identidad de una persona, se basa en el uso de números primos aleatorios.

Otro ejemplo del uso de la aleatoriedad se encuentra en el acceso a una conexión segura, como en el caso de una compra a través de uno de los numerosos portales a través de los que acabamos de realizar la adquisición de algún regalo de Navidad. El protocolo de conexión contiene, como una de sus partes fundamentales, el uso de números aleatorios.



Números aleatorios

¿Pero cómo puede una máquina, como un ordenador, cuya tecnología se basa en el uso de fórmulas, crear algo que no responda a una fórmula concreta y, por tanto, pueda ser considerado aleatorio? La respuesta es que los números que se generan parecen aleatorios, pero en realidad se crean mediante fórmulas matemáticas.

Algunos de los tipos de métodos, utilizados por ejemplo por IBM, son conocidos como métodos congruenciales.

Este tipo de métodos, a partir de una semilla o núme-

[6] *mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kolmogorov/*.

ISSN 1988-5318

ro inicial , que denotamos por $X(0)$, consiste en crear una sucesión $X(n+1) \equiv aX(n) + b \pmod{m}$, donde a y b son números enteros, siendo $U(n) = \frac{X(n)}{m}$ una sucesión de números obtenidos entre 0 y 1.

Existen resultados matemáticos que permiten asegurar, en función de la elección de los parámetros m, a y b, que los números obtenidos verifican unas propiedades que permiten afirmar que dichos números parecen aleatorios, es decir, son lo que se llaman *números pseudoaleatorios*.

Por ejemplo, si el máximo común divisor de a y m es 1; si m es divisible por 4, entonces el resto de dividir a por 4 es 1 y si , además, el resto de dividir a por cualquier factor primo de m es 1, entonces puede asegurarse que el periodo de repetición de la sucesión de números aleatorios es lo máximo posible.

Sin embargo, los métodos matemáticos nos son suficientes para asegurarnos la seguridad de nuestros sistemas de ciberseguridad. Tal y como dice uno de los padres de la Criptografía moderna, Adi Shamir, *«La Criptografía no se rompe, pero se sobrepasa»*.

Llevar estos métodos a la práctica puede dejar abiertas puertas, que no lo deberían estar. En el caso precisamente del protocolo de conexión segura, el uso de números aleatorios permite la generación de cierta clave secreta utilizada en un momento determinado de la comunicación.

Logotipo de la NSA

Un «fallo» (o no tal fallo) en la implementación del método, permitió a la NSA [7] durante años ser capaz de acceder al estado del generador de números aleatorios de cualquier ordenador, es decir, a un valor de la sucesión $X(n)$ en un momento determinado, lo que, unido al hecho de conocer los factores a, b y m, hace posible reconstruir la sucesión completa y, por tanto, cualquier clave secreta utilizada en cualquier momento de la conexión o, lo que es lo mismo, espiar dicha comunicación y acceder a toda la información intercambiada.

De este modo, nuestra seguridad no depende solo del hecho de unas matemáticas bien fundamentadas, sino también de un uso de ellas no dejado al azar. ■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

Jóvenes investigadoras galardonadas con el Premio Vicent Caselles de Matemáticas

Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla

Isabel María Ortiz Rodríguez
Universidad de Almería

Es de todos conocido que no existe el *premio Nobel* en Matemáticas y que, en su lugar, el máximo galardón que puede recibir un matemático es la *Medalla Fields*. Sin embargo, hay muchos otros premios, también muy importantes y considerados, que pueden ser alcanzados por los matemáticos en base a sus estudios, trabajos y la relevancia de sus descubrimientos, como, por ejemplo, el *premio Abel*.

Vicent Caselles

Actualmente, se conceden en España dos premios relevantes en Matemáticas, patrocinados por la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME) junto a otras entidades: el *Premio José Luis Rubio de Francia* y los *Premios de Investigación Matemática Vicent Caselles*. A este último vamos a dedicar este artículo.

Los *Premios Vicent Caselles* están dirigidos a jóvenes investigadores en matemáticas, menores de 30 años, españoles o que hayan realizado su trabajo de investigación en una universidad o centro científico de España. Estos premios se iniciaron en 2015, fruto de la colaboración entre la *Fundación BBVA* y la RSME, para el impulso y la difusión del conocimiento científico. Se conceden 6 premios por convocatoria.

El nombre de estos premios se puso en memoria de Vicent Caselles Costa, nacido en Gata de Gorgos (Alicante) en 1960. Vicent se licenció en Matemáticas en 1982 y se doctoró en 1985 por la *Universidad de Valencia*. Tras realizar estancias postdoctorales en Italia, Alemania y Francia, fue Profesor Titular en la *Universidad de las Islas Baleares* y en la *Universidad Pompeu Fabra*, donde obtuvo la cátedra en 2002. En 2012, un año antes de su fallecimiento, obtuvo el mayor reconocimiento europeo en investigación, un ERC Advanced Grant [2].

Ganadores del Premio Vicent Caselles

A continuación, enumeramos los ganadores de este premio en cada una de las ediciones convocadas, las mujeres aparecen en negrita:

- 2015: Alejandro Castro Castilla, **Jezabel Curbelo Hernández**, Javier Fresán Leal, Rafael Granero Belinchón, Luis Hernández Corbato y Xavier Ros Otón.

[7] La Agencia Nacional de Seguridad de los Estados Unidos, responsable de la monitorización, recopilación y procesamiento de la información, así como la protección de las redes de comunicaciones y sistemas de comunicación en Estados Unidos.

- 2016: Roger Casals, Francesc Castellà, Leonardo Colombo, José Manuel Conde Alonso, Martín López García y Jesús Yepes Nicolás.

- 2017: Óscar Domínguez Bonilla, Javier Gómez Serrano, Angelo Lucia, **María Medina**, **Marina Murillo**, **Beatriz Sinova** y Félix del Teso.

- 2018: David Beltrán, David Gómez Castro, David González Álvaro, **Vanesa Guerrero Lozano**, Álvaro del Pino y **Carolina Vallejo Rodríguez**.

- 2019: Daniel Álvarez Gavela, **María Ángeles García-Ferrero**, Xabier García Martínez, Umberto Martínez Peñas, Carlos Mudarra Díaz-Malaguilla y **Marithania Silvero Casanova**.

- 2020: Diego Alonso Orán, Alessandro Audrito, Rubén Campoy García, **María Cumplido Cabello**, **Ujué Etayo** y **Judit Muñoz Matute**.

La convocatoria 2021 está abierta desde mediados de diciembre de 2020 hasta finales de febrero de 2021 [3].

Mujeres que han sido galardonadas con el Premio Vicent Caselles

Entre los 30 premiados, hay 11 mujeres, de las cuales vamos a dar una breve biografía y las razones por las que consiguieron el galardón [3].

Jezabel Curbelo

Jezabel Curbelo Hernández (Los Realejos, Tenerife, 1987) es licenciada en Matemáticas por la *Universidad de La Laguna* y doctora por la *Universidad Autónoma de Madrid* en 2014. Su investigación consiste en el estudio de modelos matemáticos que describen fenómenos geofísicos, concretamente en el análisis numérico de problemas de convección con viscosidad dependiente de la temperatura.

María Medina

María Medina (Madrid, 1987) se licenció y doctoró en Matemáticas por la *Universidad Autónoma de Madrid*. Investiga en ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Ha sido profesora voluntaria en asociaciones que tienen programas para adolescentes de entornos conflictivos y en el *Proyecto Escuelab*, destinado a fomentar la ciencia entre niños de entornos con pocos recursos.

Marina Murillo

Marina Murillo (Cádiz, 1987) es licenciada en Matemáticas por la *Universidad de Cádiz* (primer premio nacional al Rendimiento Académico Universitario) y doctora por la *Universidad Politécnica de Valencia*. Investiga en Topología y Teoría de Operadores, con aplicación a la mejora de la comunicación entre dispositivos móviles. También ha publicado en didáctica de las Matemáticas.

Beatriz Sinova

Beatriz Sinova (Luanco, Asturias, 1987) se licenció en Matemáticas en la *Universidad de Oviedo* (premio Extraordinario de Licenciatura).

Realizó la tesis entre la *Universidad de Oviedo* y la *Universidad de Gante* (Bélgica). Investiga en Estadística, en datos difusos (fuzzy).

Vanesa Guerrero

Vanesa Guerrero Lozano (Guadalcanal, Sevilla, 1989) se graduó en Matemáticas en 2012 en la *Universidad de Sevilla*, Máster en Matemáticas Avanzadas (2013) y doctora en Matemáticas (2017). Trabaja en el desarrollo de herramientas para el análisis de grandes conjuntos de datos, aplicando técnicas de optimización matemática. También recibió en 2018 el *Premio Ramiro Melendreras* para jóvenes investigadores, de la *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa* (SEIO).

Carolina Vallejo

Carolina Vallejo Rodríguez (Alicante, 1988) es licenciada en Matemáticas y Máster en Investigación Matemática por la *Universidad de Valencia*. Trabaja en la Teoría de Representaciones, ha resuelto en algunos casos la conjetura de McKay y sus generalizaciones, que ocupan un papel central en el estudio de los problemas globales-locales.

M. Ángeles García

María Ángeles García-Ferrero (León, 1991) es licenciada en Físicas por la *Universidad de Valladolid* y doctora en Matemáticas por la *Universidad Complutense* de Madrid. Investiga en problemas geométricos en ecuaciones en derivadas parciales y en el desarrollo de teoremas de aproximación global. También recibió el *Pre-*

ISSN 1988-5318

mio José Luis Rubio de Francia en 2019, siendo la segunda mujer en obtener este galardón, tras María Pe Pereira en 2012.

Marithania Silvero

Marithania Silvero Casanova (Huelva, 1989) es licenciada y doctora en Matemáticas por la *Universidad de Sevilla*.

Su investigación se enmarca en la topología, y más concretamente en la teoría de nudos, habiendo refutado una conjetura de L. H. Kauffman, que databa de 1983.

María Cumplido

María Cumplido Cabello (Córdoba, 1992) es graduada en Matemáticas por la *Universidad de Sevilla* y doctora en Matemáticas por las Universidades de *Sevilla* y *Rennes I* (Francia). Su campo de investigación son las trenzas y su generalización algebraica, habiendo resuelto un problema de 20 años de antigüedad referido a los grupos de Artin-Tits.

Ujué Etayo

Ujué Etayo (Pamplona, 1992) es Graduada en Matemáticas por la *Universidad de Valladolid* y doctora en Ciencia y Tecnología por la *Universidad de Cantabria*. Su tesis doctoral versó sobre cómo distribuir de forma óptima un conjunto de puntos en una esfera, problema que tiene muchas aplicaciones en diversos campos. Resolvió, junto con otros investigadores, un problema propuesto por Smale y Shub sobre la estabilidad de polinomios.

Judit Muñoz

Judit Muñoz Matute (Barakaldo, 1991) estudió Matemáticas en la *Universidad del País Vasco*, en la que también hizo un máster en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación. Trabaja en métodos numéricos en Ecuaciones Diferenciales Parciales, con aplicaciones, por ejemplo, a la simulación de diferentes procesos físicos en ingeniería, para saber cómo se van a comportar en el aire las ondas acústicas, o para la simulación en el diseño de ciertos materiales de submarinos.

Una reflexión de los autores

Finalizamos aquí esta colaboración sobre el papel que ha jugado la mujer en los *Premios Vicent Caselles* de Matemáticas con un cierto halo de esperanza y sobre todo de alegría y confianza por lo que se refiere al reconocimiento del trabajo de las mujeres en el futuro.

Y también nos queda una sensación de sano orgullo por la representación andaluza, cuatro de las once mujeres galardonadas, tres de la *Universidad de Sevilla* y una de la *Universidad de Cádiz*. Ojalá sigan estos resultados, para las mujeres en general y para las andaluzas en particular, o incluso puedan mejorarse en los años venideros.

Referencias

[1] Núñez Valdés, J. (2019). Las mujeres y los Premios de Matemáticas, *Revista Pensamiento Matemático* IX:1, 113–147.

[2] Soler, J. (2013). Vicente Caselles, Matemático. Diario El País, 06/09/2013 [8].

[3] Página web de la Real Sociedad Matemática Española [9].

■

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Año nuevo, ecuación de Pell nueva

Miguel Martínez Teruel
Estudiante del Grado en Matemáticas de la UAL

No hay nada como empezar el año despertando un poco esas neuronas que todavía siguen de vacaciones con un bonito problema matemático. Para ello, presentamos la ecuación de Pell, que tiene la siguiente forma:

$$x^2 - ny^2 = 1,$$

donde x e y son nuestras variables y n es un número entero. Esta es una ecuación diofántica, es decir, nos preocupamos solo en estudiar las soluciones de esta ecuación para las cuales x e y sean números enteros.

Como propósito de año nuevo, vamos a dar un método para resolver este tipo de ecuaciones para el caso concreto $n = 2021$. Esto es, encontrar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 - 2021y^2 = 1.$$

[8] *https://elpais.com/sociedad/2013/09/06/actualidad/1378421989_761712.html*.
[9] *http://www.rsme.es*.

ISSN 1988-5318

Primero, recordemos el concepto de fracción continua. Dada $z \in \mathbb{R}$, el objetivo es expresar este número de la siguiente forma:

$$z = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

donde a_0 es un número entero y a_i con $i \in \{1, 2, \ldots\}$ son números naturales.

Las fracciones continuas van a ser clave para resolver esta ecuación. De hecho, el primer paso será calcular la fracción continua de $\sqrt{2021}$ (de forma general habrá que calcular la fracción continua de $\sqrt{n}$). Para ello, nótese que

$$44^2 = 1936 < 2021 < 45^2 = 2025.$$

Por tanto,

$$\sqrt{2021} = 44 + \frac{1}{k}$$

para cierto $k > 1$. Ya tenemos el valor $a_0 = 44$. Vamos a intentar obtener los demás coeficientes manipulando el valor k. Comenzamos despejándolo:

$$\sqrt{2021} = 44 + \frac{1}{k} \Rightarrow \sqrt{2021} - 44 = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2021} - 44}.$$

Una vez hecho esto, racionalizamos la fracción que hemos obtenido.

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\sqrt{2021} - 44} \frac{\sqrt{2021} + 44}{\sqrt{2021} + 44} \\ &= \frac{\sqrt{2021} + 44}{2021 - 44^2} \\ &= \frac{\sqrt{2021} + 44}{85}. \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\sqrt{2021} = 44 + \frac{1}{k}$, se tiene que

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{2021} + 44}{85} \Rightarrow \\ 85k &= \sqrt{2021} + 44 \Rightarrow \\ 85k &= 44 + \frac{1}{k} + 44 \Rightarrow 85k = 88 + \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Ahora transformamos esta igualdad buscando la forma de fracción continua.

$$\begin{aligned} 85k &= 88 + \frac{1}{k} \Rightarrow \\ k &= \frac{88}{85} + \frac{1}{85k} \Rightarrow \\ k &= 1 + \frac{3}{85} + \frac{1}{85k} = 1 + \frac{3k+1}{85k} = 1 + \frac{1}{\frac{85k}{3k+1}}. \end{aligned}$$

Por tanto, $a_1 = 1$. Para seguir obteniendo los coeficientes, habrá que tomar la fracción

$$\frac{85k}{3k+1},$$

sustituir $k = 1 + \frac{1}{\frac{85k}{3k+1}}$ y buscar la expresión de una fracción continua.

Este proceso es correcto, pero puede resultar un poco costoso si se quiere hacer a mano. Por tanto, mostramos un método alternativo y equivalente pero que resulta más llevadero sin necesidad de hacer uso de un programa informático. Lo único que necesitamos es la parte entera de $\sqrt{2021}$ que ya ha sido calculada previamente:

$$\sqrt{2021} = 44 + (\sqrt{2021} - 44) = \boxed{44} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2021} - 44}}.$$

Ahora hacemos lo mismo con el denominador que nos ha quedado. Denotamos por $\mathcal{R}$ el acto de racionalizar y con $\{\}$ denotamos las operaciones intermedias:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2021} - 44} &\overset{\mathcal{R}}{=} \frac{\sqrt{2021} + 44}{85} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{44+44}{85} \approx 1{,}03\ldots \\ \frac{85}{85} + \frac{\sqrt{2021}+x}{85} = \frac{\sqrt{2021}+44}{85} \\ x = -41 \end{array} \right\} \\ &= \boxed{1} + \frac{1}{\frac{85}{\sqrt{2021} - 41}}. \end{aligned}$$

Seguimos con el denominador que nos ha quedado y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} \frac{85}{\sqrt{2021} - 41} &\overset{\mathcal{R}}{=} \frac{\sqrt{2021} + 41}{4} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{44+41}{4} \approx 21{,}2\ldots \\ \frac{21 \cdot 4}{4} + \frac{\sqrt{2021}+x}{4} = \frac{\sqrt{2021}+41}{4} \\ x = -43 \end{array} \right\} \\ &= \boxed{21} + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{2021} - 43}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{2021} - 43} &\overset{\mathcal{R}}{=} \frac{\sqrt{2021} + 43}{43} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{44+43}{43} \approx 2{,}02\ldots \\ \frac{2 \cdot 43}{43} + \frac{\sqrt{2021}+x}{43} = \frac{\sqrt{2021}+43}{43} \\ x = -43 \end{array} \right\} \\ &= \boxed{2} + \frac{1}{\frac{43}{\sqrt{2021} - 43}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{43}{\sqrt{2021} - 43} &\overset{\mathcal{R}}{=} \frac{\sqrt{2021} + 43}{4} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{44+43}{4} \approx 21{,}7\ldots \\ \frac{21 \cdot 4}{4} + \frac{\sqrt{2021}+x}{4} = \frac{\sqrt{2021}+43}{4} \\ x = -41 \end{array} \right\} \\ &= \boxed{21} + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{2021} - 41}}, \end{aligned}$$

ISSN 1988-5318

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{2021}-41} &\overset{\mathcal{R}}{=} \frac{\sqrt{2021}+41}{85}\\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{44+41}{85} = 1 \\ \\ \frac{85}{85} + \frac{\sqrt{2021}+x}{85} = \frac{\sqrt{2021}+41}{85} \\ x = -44 \end{array} \right\}\\
&= \boxed{1} + \cfrac{1}{\frac{85}{\sqrt{2021}-44}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{85}{\sqrt{2021}-44} &\overset{\mathcal{R}}{=} \sqrt{2021}+44\\
&= \boxed{88} + (\sqrt{2021}-44).
\end{aligned}$$

Nótese que al llegar a $\sqrt{2021}-44$, que es la parte decimal de $\sqrt{2021}$, tenemos que los coeficientes de la fracción continua se repetirán con el periodo $\overline{1,21,2,21,1,88}$. De forma compacta, lo expresamos de la siguiente forma:

$$\sqrt{2021} = [44, \overline{1,21,2,21,1,88}].$$

Una vez que tenemos la fracción continua de $\sqrt{2021}$, si tomamos un número finito de coeficientes de esta, lo que tenemos es una aproximación de $\sqrt{2021}$. Es decir,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2021} &\approx 44,\\
\sqrt{2021} &\approx 44 + \frac{1}{1} = 45,\\
\sqrt{2021} &\approx 44 + \frac{1}{1+\frac{1}{21}} = \frac{989}{22}.
\end{aligned}$$

Y así podríamos continuar. Cuantos más coeficientes tomemos, más exacta será nuestra aproximación. Pues bien, teniendo el periodo $\overline{1,21,2,21,1,88}$, nos tomamos la aproximación que aporta tomar todos los coeficientes del periodo excepto el último. Es decir,

$$\sqrt{2021} \approx 44 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{21+\frac{1}{1}}}}} = \frac{45495}{1012}.$$

Estimado lector o lectora, lo crea o no, $x = 45495$ e $y = 1012$ es solución de la ecuación

$$x^2 - 2021y^2 = 1.$$

Efectivamente, sustituyendo, tenemos que

$$2069795025 - 2069795024 = 1.$$

Sé que ahora mismo puede estar sorprendido, pero esta es la punta del iceberg. Pues si tomamos el valor

$$\alpha = 45495 + 1012\sqrt{2021},$$

le podemos asegurar que la ecuación $x^2 - 2021y^2 = 1$ tiene infinitas soluciones y las obtenemos de $\pm\alpha^m$ con $m \in \mathbb{Z}$. Es decir, dado un número entero m, calculamos α^m, que podrá ser expresado de la forma $a + b\sqrt{2021}$. Entonces, $x = \pm a$ e $y = \pm b$ es solución de la ecuación $x^2 - 2021y^2 = 1$. Es por esto que la solución $x = 45495$ e $y = 1012$ recibe el nombre de solución fundamental.

De esta manera, hemos completado el propósito de año nuevo que nos habíamos propuesto al principio. Finalmente, y como divertimento, le proponemos calcular α^2 y comprobar que efectivamente nos da otra solución de la ecuación de Pell. ■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

Curvas de flores y demás historias

José Luis Rodríguez Blancas
Universidad de Almería

Me encantaría iniciar esta breve nota con el taller que nos presentó Debora Pereiro el pasado mes de julio de 2020, sobre modelado de flores en *Geogebra* [10].

Flores modeladas con Geogebra. Crédito: Debora Pereiro

Para ello necesitó recordar parametrizaciones de algunas curvas y superficies, tanto en el plano como en el espacio, y generar la flor a partir de uno de sus pétalos, gracias a la simetría rotacional presente en cada caso. En algunas flores, hay que tener en cuenta el ángulo áureo, que nos define la distribución de los pétalos (véase por ejemplo [3]).

Y es que las flores han sido motivo de admiración y estudio, además de la botánica y del arte, también en Física y Matemáticas. La comprensión de los fenómenos de la naturaleza y sus elementos ha inspirado el avance de la ciencia, aunque no siempre de manera acertada, cuando hablamos de curvas. Basta recordar que el sistema geocéntrico de Ptolomeo hacía uso de las epitrocoides para predecir las órbitas planetarias (basándose en los epiciclos de Apolonio de Perga en el siglo III a. C. y que desarrolló después Hiparco de Nicea en el siglo II a.C).

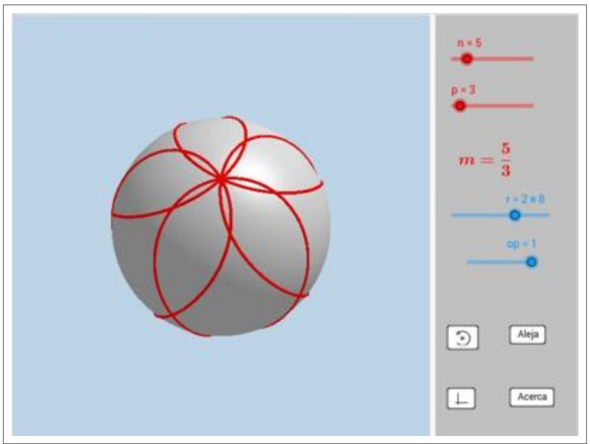
[10] *www.geogebra.org/m/ddfnv7j6.*

 ISSN 1988-5318

El matemático Guido Grandi (1671–1742), difusor de los resultados del cálculo inventado por Leibniz (1646–1716) en Italia, recogió en su libro titulado *Flores Geometrici* publicado en 1728, diferentes tipos de curvas que modelan las flores. Entre ellas, las conocidas como «clelias», llamadas así en honor a la condesa Clelia Borromeo, y que tienen como ecuación:

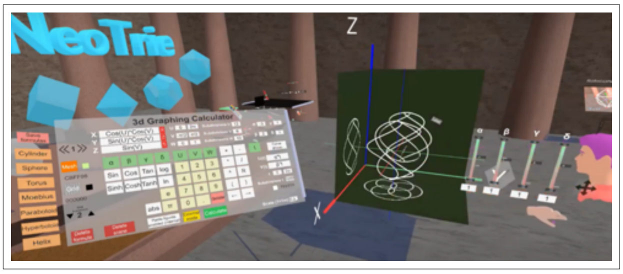
$$\begin{aligned} x &= a\sin(m\theta)\cos(\theta),\\ y &= a\sin(m\theta)\sin(\theta),\\ z &= a\cos(m\theta). \end{aligned}$$

Las clelias pueden ser consideradas «espirales» de Arquímedes esféricas, al variar uno de los parámetros proporcionalmente respecto al otro.



***Applet sobre clelias realizado por José Manuel Arranz* www.geogebra.org/m/juVkqBEz**

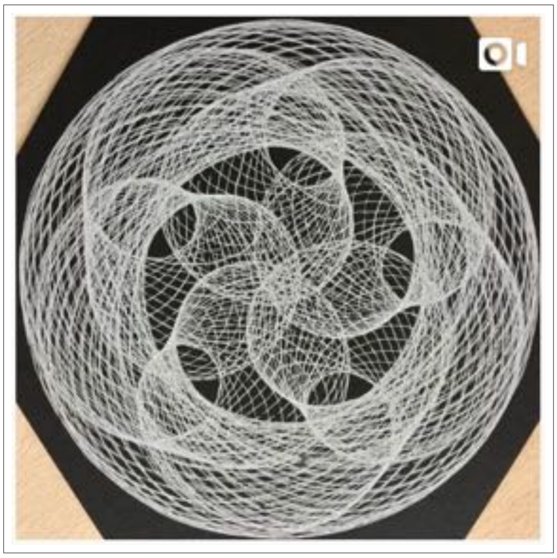
También pueden manejarse en realidad virtual en *Neotrie VR* [11].



Por cierto, el título de condesa de Borromeo le es otorgado a Clelia por casarse con el conde Giovanni Benedetto Borromeo, de la familia en cuyo escudo de armas aparecen los anillos de Borromeo, tres anillos entrelazados de modo que al quitar uno los otros dos se sueltan.

Seguro que ahora tenéis ganas de rescatar el espirógrafo del armario. Podréis dibujar a mano preciosas epitrocoides al rodar una ruleta dentada por fuera de otra fija, e hipotrocoides si la rodamos por dentro.

Os recomiendo el libro interactivo [2] donde encontraréis estas y muchas otras curvas y superficies. Es hipnotizador observar cómo se generan automáticamente los diseños de este artista minimalista austriaco [12].



La tierra podría dibujar también, ¿verdad?, y si no que se lo digan a Foucault, que con el péndulo propuesto en 1958 mostró evidencia clara de la rotación de la tierra, al dejar este el rastro de una preciosa rosa polar en el suelo.

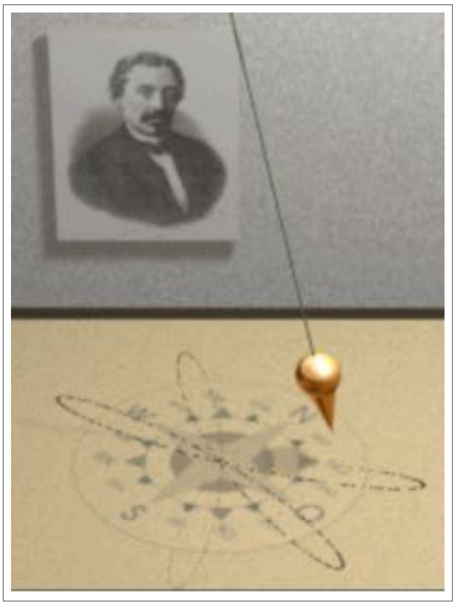


Ilustración del péndulo de Focault dibujando una rosa polar. Fuente: Wikipedia

Referencias

[1] Grandi, Guido. *Flores geometrici ex Rhodonearum, et cloeliarum Curvarum descriptione resultantes. Florentiae*, Typ. Regiae Celsitudinis, 1728 [13].

[2] Rivera Berrío, J.G., (2018) *Curvas y superficies paramétricas*, Interactivo, Editorial Pascual Navarro [14].

[3] Leonardo Pissano Fibonacci. El número áureo. Matemáticas en la vida cotidiana [15].

■

[11] Véase a partir del minuto 32:22 en el video que aparece en *www2.ual.es/neotrie/conferencia-en-el-atcm-2020*.
[12] *www.instagram.com/speechless.drawing*.
[13] Accesible en *archive.org/details/bub_gb_UBqguM3wdwQC/page/n61/mode/2up*.
[14] Accesible en *proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Curvas_y_Superficies_Parametricas/indexb.html*.
[15] Accesible en *ucua.ujaen.es/jnavas/mayores/fibonacci.pdf*.

 ISSN 1988-5318

Citas Matemáticas

«Hay muchas matemáticas que son ahora la base de la tecnología actual y que cuando se hicieron en su momento no servían para nada. En matemática pura, haces las cosas porque te parecen interesantes».

María Cumplido (1992), matemática española galardonada con el Premio de Investigación Matemática Vicent Caselles 2020.

«La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad».

Richard Courant (1888–1972), matemático alemán.

Acertijos

Cultura mediterránea

Almazara de Íllar, 12 de marzo de 1564. Mateo Arrami, morisco del valle del Andarax, se dispone a retirar su producción de aceite en dos tipos de tinajas, de 3 y 5 arrobas [16] de capacidad. Si ha obtenido un total de 54 arrobas y ha completado 14 tinajas, ¿cuántas hay de cada clase? *(En el próximo número aparecerá la solución.)*

Solución al acertijo del número anterior

Se trataba de adivinar, razonablemente, la letra que debe figurar tras las siguientes:

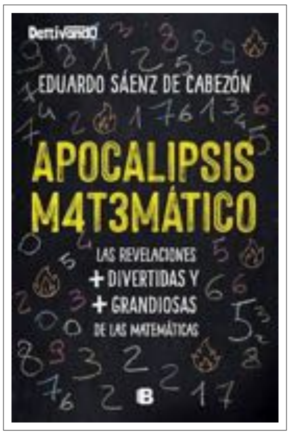
U T C S N O T Q

Como puede apreciarse, la sucesión anterior contiene las iniciales de los primeros impares (UNO, TRES, CINCO, SIETE, NUEVE, ONCE, TRECE, QUINCE). De acuerdo con ello, la siguiente letra es la D (DIECISIETE).

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

Apocalipsis matemático.

Eduardo Sáenz de Cabezón.



Ficha Técnica
Editorial: Plan B.
200 páginas.
ISBN: 978-84-17809-04-1.
Año: 2020.

En este número del Boletín vamos a reseñar dos obras de divulgación con enfoques totalmente contrapuestos. Esta primera, cuyo autor —sobradamente conocido por todos— Eduardo Sáenz de Cabezón presenta un texto muy directo, con un estilo coloquial dirigido a un público juvenil, y una segunda, en la que el académico e historiador de la ciencia, José Manuel Sánchez Ron, elabora un paseo enciclopédico por la historia de la ciencia en nuestro país. Vayamos por partes.

Apocalipsis Matemático es un libro desenfadado, en el que el autor trata los temas que han despertado un mayor interés de entre los vídeos que ha publicado en su canal de *YouTube* Derivando.

En este texto, el lector puede encontrar numerosas cuestiones matemáticas más que interesantes: aspectos relacionados con la teoría de números, la base en la que se fundamenta el algoritmo de búsqueda de *Google*, las

[16] La arroba es una antigua unidad de masa y volumen prácticamente en desuso. Su valor no es el mismo en todas las regiones. Como medida de masa, equivale (generalmente) a 11,5 kg y, como medida de volumen, cabe distinguir entre las arrobas de aceite (algo más de 12 litros y medio) y las arrobas de vino (poco más de 16 litros).

 ISSN 1988-5318

relaciones en la redes sociales, problemas abiertos en matemáticas no resueltos aún, el cero, el infinito, etc.

Todo ello, tal y como he comentado al principio de esta reseña, con el estilo al que nos tiene acostumbrados Eduardo: directo, ameno y divertido, sin descuidar en ningún momento el rigor.

Los temas se tratan de forma que sean accesibles al gran público sin demasiado aparataje matemático, lo que no quiere decir que se traten cuestiones triviales, ya que algunas de los problemas que se presentan poseen una cierta profundidad matemática, aunque se abordan obviando las dificultades formales.

En resumen, una obra recomendable para quien quiera conocer aspectos de las matemáticas no muy usuales —y en algunos casos, de una cierta complejidad— sin necesidad de tener una formación profunda en la materia.

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

El país de los sueños perdidos. Historia de la ciencia en España.

José Manuel Sánchez Ron.

Ficha Técnica
Editorial: Taurus.
1150 páginas.
ISBN: 978-84-306-1927-1.
Año: 2015.

Esta segunda obra, tal y como he comentado anteriormente, es un enfoque totalmente diferente de la divulgación —lo que no quiere decir que sea ni mejor ni peor—. De alguna forma, podríamos decir que se trata de la «cara académica» de la divulgación científica.

Para comenzar, he de decir que es una obra impresionante, excepcionalmente documentada, sobre el desarrollo de la ciencia en nuestro país desde el siglo VII hasta finales del XX.

Aunque en la sección abordamos textos relacionados con la matemáticas, tal y como ilustra el título, este texto es mucho más amplio, pues aborda la evolución en España de muchas disciplinas científicas: matemáticas, física, química, astronomía, ciencias naturales, etc. Sin embargo, dada la magnitud de la obra, me parece que es un texto imprescindible para entender y comprender muchas de las cuestiones actuales sobre el desarrollo científico en nuestro país.

En cuanto a las matemáticas —aunque aparecen de forma transversal en algunos de los periodos tratados—, se dedican dos capítulos específicos: la matemática decimonónica y el papel de Echegaray —de quien el autor publicó una excelente biografía— y el dedicado a Julio Rey Pastor y su influencia en el desarrollo de las matemáticas en el siglo XX.

A mí, particularmente, me ha resultado muy curioso el capítulo dedicado al papel de la ciencia y de los científicos en la colonización de América así como los dedicados a la creación del CSIC y los avatares de la ciencia y la tecnología en el periodo de la dictadura franquista.

El texto está redactado de una forma muy cuidada y elegante —José Manuel Sánchez Ron ocupa el sillón G de la *Real Academia Española*—, posee una extensa bibliografía y la edición, a pesar de su voluminosidad, es excelente. Una obra imprescindible para difrute y consulta de toda persona interesada en la ciencia española.

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Páginas web de interés

Mathematics Genealogy Project

Esta magnífica *página web* del Department of Mathematics de la *North Dakota State University*, en colaboración con la *American Mathematical Society*, es en realidad un proyecto que pretende construir un árbol genealógico de cualquier matemático con el título de doctor.

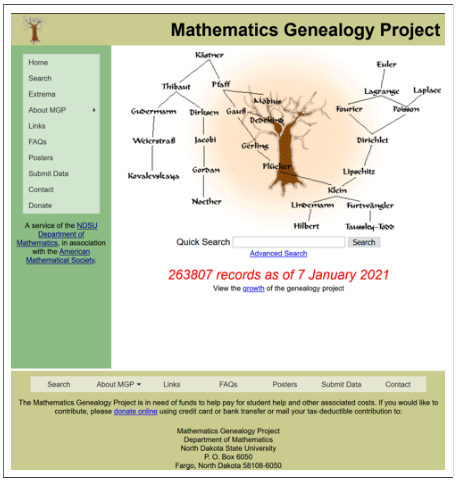
Igual que se construye un árbol genealógico de una persona con sus padres, abuelos, bisabuelos, etc. lo mismo hace este proyecto, pero con un matemático o matemática y ahora los padres son los directores de tesis y, por tanto, los abuelos son los directores de los directores de la tesis del sujeto para el que se está construyendo el árbol. De esta manera se puede establecer el parentesco que nos une a los matemáticos.

Si te gusta la historia de las matemáticas y sus personajes, disfrutarás con esta web que junto a la de la University of St Andrews (MacTutor History of Mathematics [17]), de la que hice una reseña en este Boletín (Volumen VIII, número 2), nos permite adentrarnos de una forma lúdica en el apasionante mundo de la vida de los matemáticos.

Por otro lado, nos permite bichear, expresado de forma coloquial, en nuestros ancestros matemáticos. No pondré ningún ejemplo concreto pues estoy seguro de que el lector preferirá pasar un rato divertido averiguando quiénes son sus antepasados o los de algún colega. Pero no me puedo resistir a dar alguna información.

[17] *mathshistory.st-andrews.ac.uk*.

ISSN 1988-5318



genealogy.math.ndsu.nodak.edu

Si tomamos la lista de los miembros del Departamento de Matemáticas de la *Universidad de Almería* podemos encontrar a descendientes en *línea de parentesco recta* [18] de Weierstrass, Liouville, Laplace, Lagrange, Gauss, Euler, Tonelli, Arzelà, Rey Pastor, Vigil, Klein, Lipschitz, Dirichlet, Poisson, Fourier, Leibniz, Johann Bernoulli, etc. Seguro que hay muchos más y el lector disfrutará encontrándolos.

Como curiosidad Weierstrass tiene 36 838 descendientes, de acuerdo a la web y en la fecha de escribir esta reseña, y dirigió a 46 estudiantes, Euler tuvo sólo 6 estudiantes pero tiene 126 858 descendientes gracias al prolífico Lagrange, Rey Pastor tuvo 14 estudiantes y 1312 descendientes, Tonelli tuvo 6 estudiantes y 632 descendientes, y así podríamos seguir.

La web también nos enlaza a biografías en MacTutor y, en su caso, a los datos de las personas en *MathSciNet* [19]. Otra información reseñable es el título de la tesis, el año de la defensa y la universidad donde se llevó a cabo. Por cierto, si eres doctor o doctora en Matemáticas y no apareces en la web puedes darte de alta a través de un formulario.

Reseña de Juan José Moreno Balcázar
Universidad de Almería

TERRITORIO ESTUDIANTE

Matemáticas ocultas tras el virus

Alberto Díaz López
Celia Barbero Navarro
Delia Sola Molina
Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

Continuamente escuchamos datos sobre el coronavirus que difícilmente toda la población llega a comprender. El anumerismo tiene un papel muy importante, convirtiendo una sociedad en un blanco fácilmente manipulable. ¿Debemos creernos todo lo que vemos? ¿Son ciertos los datos y estadísticas que difunden los medios? ¿Qué papel juegan las matemáticas en esta pandemia?

Nuestro objetivo es conocer el virus desde el punto de vista de las matemáticas y ser capaces de asimilar la información de nuestro alrededor de forma rigurosa. También veremos el papel fundamental que desempeñan las matemáticas en el tratamiento de datos.

Por un lado, en cuanto al análisis de datos, esta pandemia mundial se muestra, día a día, a través de números, su evolución se mide con gráficos, los afectados se reflejan en cifras y las incertidumbres en hipótesis matemáticas. La diferencia con las matemáticas que conocemos es que estos no son simples cálculos, detrás de cada número hay una historia.

El recuento diario de infectados, hospitalizados, fallecidos y curados por la COVID-19 son números que pueden leerse de dos maneras: como cifras absolutas (con las que sabemos cuánta gente hay en cada uno de los escenarios) o como parte de una tendencia. Así podríamos calcular el incremento de los casos diarios, pero para esto se necesita tiempo.

Para entender la evolución de la enfermedad en nuestro país existen muchos tipos de indicadores, entre ellos está la tasa de crecimiento de la epidemia (el incremento porcentual de casos) o el número reproductivo básico (el promedio de casos secundarios causados por una persona infectada).

Todo esto forma parte de las matemáticas que nos ayudan a entender el presente y el futuro de la COVID-19. Pues, disponemos de información «en tiempo real» sobre la evolución de los afectados y tenemos modelos matemáticos que nos permiten predecir qué puede pasar de aquí a unos días.

Pero en esta situación es donde necesitamos información epidemiológica correcta para poder dar resultados fiables. Sin embargo, las incógnitas sobre la enfermedad y el caos en los datos dificultan la elaboración de los modelos matemáticos para predecir la evolución de la enfermedad.

Los modelos predictivos se intentan construir a pesar de estas limitaciones que existen. Y es que, hoy por hoy, no se sabe con absoluta certeza qué tiempo pasa desde que una persona se contagia hasta que empieza a mostrar síntomas de la enfermedad. O durante cuánto tiempo una persona afectada puede transmitir el virus (incluso si ha dejado de tener síntomas).

Las predicciones basadas solo en el conocimiento de la enfermedad suelen ser poco realistas, pero sirven para estudiar la influencia de las medidas de control. Por otro lado, también se trabaja con simulaciones basadas en datos reales de la epidemia para predecir su comportamiento

[18] *es.wikipedia.org/wiki/Línea_de_parentesco*.
[19] *mathscinet.ams.org/mathscinet*.

pasado y futuro. Estas son más realistas, pero hay que tener muchísimo cuidado al interpretarlas.

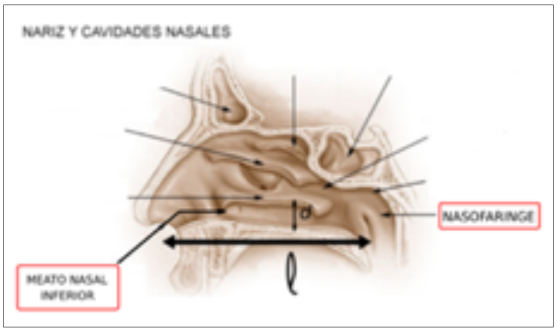
Cuantas más variables se introduzcan en el estudio y más se intente alargar el plazo de las predicciones, mayor es el margen de error. De ahí que algunos pronósticos a muy largo plazo acaben dando resultados poco reales.

Como todo estudio muestral, siempre debemos tomar todos los datos en la misma situación y circunstancias para que los resultados obtenidos en estos métodos sean lo más certeros posibles.

Por otro lado, veamos un ejemplo más práctico de como las matemáticas podrían ayudar en algo tan concreto como en la adaptación personal de cada hisopo nasofaríngeo (utilizado para detectar la COVID-19).

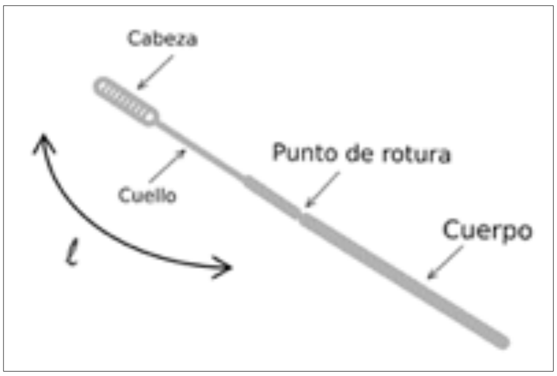
Gracias a un estudio del *Instituto de Micro Tecnología y Tecnología de Dispositivos Médicos de la Universidad Técnica de Múnich*, Alemania, se han desarrollado hisopos nasofaríngeos específicos para cada individuo, para así minimizar el dolor que pueden llegar a causar.

Para ello, se mide la longitud del meato nasal inferior, que llamaremos l, y el diámetro de este que lo denominaremos d, ya que será por este conducto por donde pase el hisopo.



Se llegó a la conclusión de que para que la varilla causara el menor daño posible y recogiese la muestra suficiente, el diámetro de la cabeza debía ser d, y su longitud de $0{,}25l$. Además, el diámetro y la longitud del cuello eran 1 mm y $0{,}5l$ y el cuerpo debía tener un diámetro d, para no atorarse en la apertura de las fosas nasales.

El punto de rotura se parte para enviar la muestra al laboratorio, es por esto por lo que la distancia entre la punta de la cabeza de la varilla y el punto de rotura es l, para evitar que la varilla se rompa dentro de la nariz.



Este es un caso en el que podemos ver una aplicación más cercana, sencilla y, a su vez, útil de las matemáticas. De esta forma vemos que las matemáticas pueden ser de gran utilidad tanto en temas de salud como en otros ámbitos.

Sin embargo, no debemos dejar de lado que todavía, hoy en día, encontramos situaciones en las que se le sigue dando un mal uso a las matemáticas, en concreto en esta pandemia.

Por ejemplo, en Chile se obtuvo un recuento de los fallecidos mal expresado: se estaban contabilizando a los fallecidos por COVID-19 como «recuperados». Se especificó que los «recuperados» eran las personas que habían cumplido 14 días desde el diagnóstico o que desgraciadamente habían fallecido.

Puede sonar extraño, pero contar a los muertos como «recuperados» forma parte del modelo matemático que se encuentra en la base de la mayoría de los simuladores usados para mostrar cómo la enfermedad provocada por el nuevo coronavirus se esparce por el mundo.

Otras personas en vez de «recuperados» prefieren decir «pacientes que han dejado de ser contagiosos». Pero claro, una persona de la calle que escucha el término recuperado nunca pensaría que puede haber una connotación negativa detrás.

Otro error que se comete y que puede hacer que los cálculos fallen es el hecho de tomar datos de forma diferente, es decir, que cada espacio muestral cambie.

Un claro ejemplo es que cada comunidad autónoma, región o país está recogiendo los datos de manera diferente y, por lo tanto, el resultado no es igual, pero se tiene en cuenta como si fuera el mismo.

Para contabilizar las muertes en Alemania solo se tienen en cuenta los fallecidos por el virus sin patologías previas. Sin embargo, en España se contabilizan el total de pacientes fallecidos con un diagnóstico positivo. En Francia, a la hora de ver los positivos, solo se registran los hospitalizados, mientras que aquí se tienen en cuenta el total de personas que han dado positivo en un test.

Esta diversidad de criterios complica todavía más el estudio de esta situación. Por esto, muchos métodos no son lo suficientemente eficaces, o, mejor dicho, válidos.

Si hay que sacar una lección en claro de todo esto es que, sobre todo en momentos de crisis, es imprescindible tener datos claros y fiables sobre lo que está pasando para poder desarrollar herramientas de control.

Así pues, las matemáticas vuelven a sorprendernos en otro aspecto en el que no pensábamos que podrían ser útiles; pues la gran verdad es que son importantes en casi todo, llegando a desempeñar un papel fundamental en la lucha contra la COVID-19. Sin embargo, en ocasiones, un uso incorrecto de ellas puede generar confusiones llegando incluso a dificultar los estudios y el tratamiento de datos.

Démosles a las matemáticas un buen uso, ¡las necesitamos!

ISSN 1988-5318

Referencias

[1] Ana Pais (2020). Modelos matemáticos de coronavirus: por qué el más popular para predecir la curva del covid-19 considera a los muertos como «recuperados». BBC NEWS [20].

[2] Valentina Raffio (2020). Los números para entender cómo evoluciona la pandemia de coronavirus. El Periódico [21].

[3] Y. Sun, A. Mercader y T. C. Lueth (2020) Design of 3D-printable nasopharyngeal swabs in MatLab for COVID-19 testing. Infinite Science Publishing [22].

■

Responsables de las secciones

➼ ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN LA UAL

- *Actividades organizadas*: Helena Martínez Puertas (hmartinez@ual.es) y Sergio Martínez Puertas (spuertas@ual.es).
- *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno Balcázar (balcazar@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Foro abierto y preguntas frecuentes*: Inmaculada López García (milopez@ual.es).

➼ DE LA ENSEÑANZA MEDIA A LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

- *Experiencias docentes*: David Crespo Casteleiro (davidcasteleiro@hotmail.com), Nuria Pardo Vidal (penuria@gmail.com) y Aurora Sánchez Gordo (aurosanchezg@gmail.com).
- *Enseñanza bilingüe*: Daniel Prados Torrecillas (plurilinguismo.dpal.ced@juntadeandalucia.es).

➼ DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

- *La Historia y sus personajes*: Enrique de Amo Artero (edeamo@ual.es), Florencio Castaño Iglesias (fci@ual.es) y Blas Torrecillas Jover (btorreci@ual.es).
- *Concurso de problemas*: Alicia María Juan González (ajuan@ual.es), Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez Granero (misanche@ual.es).
- *Las Matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez Cámara (mgamez@ual.es), Juan Antonio López Ramos (jlopez@ual.es), Francisco Luzón Martínez (fluzon@ual.es) y Antonio Salmerón Cerdán (asalmero@ual.es).
- *Mujeres y matemáticas*: Isabel María Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez Álvarez (mramirez@ual.es).
- *Cultura y matemáticas*: José Luis Rodríguez Blancas (jlrodri@ual.es) y José Ramón Sánchez García (jramon_sg@hotmail.com).
- *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales Campoy (amorales@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Páginas web de interés*: José Carmona Tapia (jcarmona@ual.es) y José Escoriza López (jescoriz@ual.es).
- *Citas matemáticas*: Alicia María Juan González (ajuan@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Pasatiempos y curiosidades*: Juan Ramón García Rozas (jrgrozas@ual.es) y José Antonio Rodríguez Lallena (jarodrig@ual.es).
- *Acertijos*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es).

➼ TERRITORIO ESTUDIANTE: Celia Barbero Navarro (celiabarnav3.cbn@gmail.com), Alberto Díaz Lopez (adl151@inlumine.ual.es) y Delia Sola Molina (deliasola2000@gmail.com).

[20] *www.bbc.com/mundo/noticias-52455414*.
[21] *www.elperiodico.com/es/ciencia/20200413/numeros-entender-coronavirus-covid19-matematicas-modelos-predictivos-7924021*.
[22] *journals.infinite-science.de/index.php/ammm/article/view/462/201*.

ISSN 1988-5318