Teoría de Juegos: una introducción

Trabajo Fin de Grado

Autor:
Ana Isabel Lao del Pino

Tutor:
José Antonio Rodríguez Lallena

Grado en Matemáticas

Junio, 2020
Universidad de Almería

Índice general

Abstract in English

In this work, we present an introduction to game theory, an area of applied mathematics that studies a great diversity of situations among different actors who compete or collaborate to achieve a particular goal.

We begin by introducing the general theory (game, players, strategies, payments, etc.) in the chapter 1, and then focus on two-player games. Among these, in chapter 2, we examine a particular case, the zero-sum games, which are those in which one player wins whatever the other player loses. Here we first study the individual strategies that players can take (pure strategies), analyzing which ones players should choose for their own benefit. The most important result in this part will be the minimax lemma.

Then we consider the case where the game can be repeated a number of times, so that the players can be persuaded to choose different pure strategies each time it is played. This leads to the introduction of so-called mixed strategies. In this case it is proven that, under the assumption that the players will rationally seek to obtain the best possible result, there is always a balance situation that solves, so to speak, the game. The result that leads to this conclusion is Von Neumann's minimax theorem, a result that also has numerous applications outside the scope of game theory.

Next, we introduce different methods of solving zero-sum games, which complement each other and provide different views of the problem.

Later, in chapter 3, we address the general situation where games can be non-zero-sum games. As with zero-sum games, we first introduce the concept of pure strategy. A desirable situation will be that the game has at least a Nash equilibrium, which is a stable situation for the game. However, we prove that these equilibria only necessarily occur when using mixed strategies. This result, which is the main one in this work, is the so-called Nash theorem.

We also collect different methods of solving non-zero-sum games, in order to find Nash equilibria. In addition, we introduce some criteria to choose the best (in some sense) Nash equilibrium, when there are more than one.

The concepts and results of these first three chapters are illustrated with examples.

Finally, the conclusions of this work are presented in chapter 4.

Resumen en español

En este trabajo se realiza una introducción a la teoría de juegos, área de la matemática aplicada que estudia una gran diversidad de situaciones entre diferentes actores que compiten o colaboran para conseguir un fin determinado.

Comenzamos introduciendo la teoría general (juego, jugadores, estrategias, pagos, etc.) en el capítulo 1, para luego centrarnos en los juegos para dos jugadores. Entre estos, comenzamos examinando, ya en el capítulo 2 un caso particular más sencillo, los juegos de suma cero, que son aquellos en los que las ganancias de un jugador coinciden con las pérdidas del otro. Aquí estudiamos primero las estrategias individuales que pueden tomar los jugadores o estrategias puras, analizando cuáles deben elegir los jugadores buscando su propio beneficio. El resultado más importante en esta parte es el *lema minimax*.

A continuación consideramos el caso en el que el juego se puede repetir un número de veces, de manera que a los jugadores les pueda convenir la elección de distintas estrategias puras cada vez que se juegue. Este hecho lleva a la introducción de las llamadas estrategias mixtas. En este caso se prueba que, bajo la suposición de que los jugadores buscarán obtener racionalmente el mejor resultado posible, siempre existe una situación de equilibrio que resuelve, por así decir, el juego. El resultado que lleva a esta conclusión es el *teorema minimax de Von Neumann*, resultado que también tiene numerosas aplicaciones fuera del ámbito de la teoría de juegos.

A continuación, introducimos distintos métodos de resolución de juegos de suma cero, que se completan unos a otros y proporcionan distintos puntos de vista del problema.

Posteriormente, en el capítulo 3, se aborda la situación general, en la que los juegos pueden ser de suma no nula. Análogamente a como se hizo con los juegos de suma cero, introducimos primero el concepto de estrategia pura. Una situación deseable será que el juego tenga al menos un *equilibrio de Nash*, que es una situación estable para el juego. Sin embargo, probamos que estos equilibrios solo se dan necesariamente cuando se utilizan estrategias mixtas. Este resultado, que es el principal de este trabajo, es el llamado *teorema de Nash*.

Recogemos también diferentes métodos de resolución de juegos de suma no nula, esto es, con el fin de encontrar equilibrios de Nash. Además, para cuando el juego tenga más de un equilibrio de Nash, se introducen algunos criterios para elegir el que sea mejor en cierto sentido.

Los conceptos y resultados de estos tres primeros capítulos se ilustran con ejemplos.

Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones de este trabajo.

1 Introducción

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que estudia situaciones conflictivas, cooperativas o de otro tipo entre jugadores que tienen intereses diferentes. Estos jugadores pueden ser personas, países, empresas, etc. Cada jugador tiene que tomar una decisión teniendo en cuenta las decisiones de los demás, que pueden ser conocidas total o parcialmente por los jugadores, o bien desconocidas. El resultado del juego se obtiene con la toma de decisiones de todos los jugadores. Para hacer un análisis racional de cómo las distintas decisiones lógicas de los jugadores llevarán a los resultados, necesitaremos hacer uso de las matemáticas.

La teoría de juegos empezó a desarrollarse en las décadas de los 40 y 50, principalmente con los trabajos de John Von Neumann, Oskar Morgenstern y John Nash. Su objetivo inicial era la aplicación a cierto número de situaciones reales en Economía (de hecho, varios premios Nobel de Economía, algunos muy recientes, han logrado este premio por nuevos desarrollos y aplicaciones de la teoría de juegos). Sin embargo, actualmente se aplica en muchos otros campos pertenecientes a diversas ciencias como son la biología, la informática (particularmente en la inteligencia artificial y la cibernética) y el análisis de datos para la toma de decisiones.

A lo largo del trabajo se introducirán y explicarán los enunciados más básicos e importantes de la teoría de juegos, que se aplicarán a algunos ejemplos para obtener una visualización más clara de lo que aportan; a la vez, nos iremos haciendo preguntas que, en su mayoría, acabaremos respondiendo.

Para iniciarnos en la teoría de juegos, introduciendo sus conceptos más básicos, nos ayudaremos de un juego sencillo y bien conocido, el llamado "tres en raya" en su versión estática, es decir, sin movimientos de fichas. Es un juego para dos jugadores que se juega sobre una cuadrícula 3×3, sobre la que un jugador marca cruces y otro círculos. El objetivo de cada jugador es conseguir una línea o diagonal con tres de sus marcas. A la hora de poner nuestra marca, pensaremos dónde hacerlo para estar más cerca de lograr una línea pero, a su vez, tendremos en cuenta que el otro jugador buscará el mismo objetivo y hará lo posible por entorpecer el nuestro. En este proceso estamos empleando una rudimentaria teoría de juegos ya que, para hacer cada movimiento, estudiamos las decisiones que ha tomado y que podría tomar el otro jugador.

Pues bien, se define un ***juego*** como la interacción entre dos o más personas, empresas, países, etc., que llamamos ***jugadores***, interacción que sigue unas reglas. En el juego tres en raya, las reglas son:

- Es un juego para dos jugadores (personas, en este caso).
- Cada jugador dispone de cinco fichas, y solo puede poner una única ficha (cruz o círculo) por turno.
- La ficha puesta no puede ponerse en una casilla ya jugada (luego el segundo jugador solo colocará cuatro).
- Gana el primer jugador que, con sus fichas, consiga una línea de tres recta o diagonal.

Todo juego conlleva unas ***ganancias o pagos*** para cada jugador, que describen cuantitativamente el resultado de cada partida (o realización del juego) en términos de lo que cada jugador gana o pierde. A las ganancias o pagos negativos los llamaremos ***pérdidas***. Los pagos habrán sido determinados por los jugadores o, la mayor parte de las veces, por la persona que define el juego, antes de su realización. Por ejemplo, en el tres en raya, el jugador que gane una partida puede conseguir el pago de un punto; mientras que el otro jugador, o no consigue nada o bien pierde un punto.

Los pagos dependen del resultado del juego, y este a su vez es consecuencia de las decisiones que toman los jugadores durante el juego. Las decisiones de un jugador definen una ***estrategia***. Esta se puede definir como el plan que tiene el jugador al comienzo de cada juego, plan que describe lo que hará en toda situación posible. Dependiendo del juego, estas estrategias serán más o menos fáciles o difíciles de establecer. Por ejemplo, será más fácil diseñar una estrategia para el tres en raya que para el ajedrez, ya que el número de movimientos posibles del primer juego es muchísimo menor que el del segundo. Las estrategias del tres en raya pueden describirse fácilmente. Por ejemplo, una estrategia para el primer jugador comenzaría poniendo su primera cruz en la casilla central; y para el segundo jugador igual, si el primer jugador no la ha ocupado, o la colocaría en una de las esquinas, si la central ha sido ocupada por el primer jugador. La estrategias para ambos jugadores tendrían que definir todas las jugadas que harían hasta el final del juego según las posibles jugadas que vaya haciendo el otro.

En resumen, un juego implica un número de jugadores, unas estrategias y unos pagos. Pero ¿cómo elegir entre esas estrategias? Daremos respuesta a esto en los siguientes capítulos para los tipos de juegos que se estudiarán en ellos. Dar respuesta a esa pregunta es el objetivo principal del trabajo, y en eso consiste la resolución de un juego.

En la teoría de juegos podemos encontrar fundamentalmente dos tipos de juegos, los cooperativos y los no cooperativos. Los ***juegos cooperativos*** son aquellos en los que los jugadores no compiten, sino que se unen para alcanzar un objetivo que sea bueno para todos ellos. Al contrario, en los ***juegos no cooperativos***, que son los que van a aparecer con más frecuencia en este trabajo, los jugadores toman sus decisiones independientemente, buscando su propio beneficio, aunque sea a costa del perjuicio de los demás. Si bien es cierto que podría darse que al buscar el propio beneficio también se beneficie a todos o a parte de los otros jugadores. Evidentemente, el tres en raya es un juego no cooperativo.

En el trabajo nos limitaremos a tratar de los juegos de dos jugadores, que llamaremos usualmente jugador 1 y jugador 2 (brevemente, $J1$ y $J2$). El estudio de estos juegos es, en general, mucho más simple que cuando el número de jugadores es mayor.

La bibliografía utilizada incluye algunos textos que introducen la teoría de juegos siguiendo orientaciones muy diversas. Aquí se ha seguido la orientación de Barron [1], que es semejante a la del reciente texto de Laraki *et al.* [3]. Para complementar este texto se ha tomado como referencia a Pérez Navarro *et al.* [6] que, en sus ocho capítulos desarrolla desde los juegos estáticos con información completa hasta los dinámicos con información incompleta; y también a Binmore [2], que desde una perspectiva más informal y haciendo uso de los personajes del cuento de “Alicia en el país de las maravillas” trata de responder a las preguntas: ¿de qué trata la teoría de juegos?, ¿cómo se aplica?, ¿por qué es correcta?

2

Juegos de suma cero

En este capítulo trataremos de los juegos bipersonales de suma cero, que son juegos no cooperativos. Veremos ejemplos de estos juegos, qué estrategias son mejores para cada jugador, así como métodos de resolución para la obtención de dichas estrategias. Al resolver estos juegos aparecerán resultados interesantes —como el teorema minimax de Von Neumann— que estudiaremos con detenimiento.

Los ***juegos bipersonales de suma cero*** son juegos no cooperativos donde un jugador gana lo que el otro pierde. Es decir, el pago que recibe el jugador 1 es el mismo que recibe el jugador 2, pero de signo contrario. Es el caso, por ejemplo, del juego de tres en raya cuando el jugador que ganaba la partida sumaba un punto y al que perdía se le restaba otro.

Supondremos que, antes de iniciar un juego, cada jugador habrá elegido una estrategia determinada. Si el jugador 1 tiene n posibles estrategias, al conjunto de estas lo denotaremos S_n^1; y si el jugador 2 tiene m posibles estrategias, al conjunto de estas lo denotaremos S_m^2.

Si el jugador 1 elige la estrategia i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, y el jugador 2 la estrategia j, con $j = 1, 2, \ldots, m$, entonces el jugador 1 recibirá un pago que representaremos a_{ij}; el cual será positivo, si es una ganancia del jugador 1, o negativo, si es una pérdida del jugador 1, es decir, un pago del jugador 1 al jugador 2. Por tanto, tendremos una colección de pagos a_{ij} que generan una matriz; dicha matriz será la ***matriz de pagos del juego*** (para el jugador 1) y la denotaremos por A. Cuando hablemos de la matriz de pagos de un juego o, simplemente, de la matriz del juego, nos estaremos refiriendo a la matriz de pagos para el jugador 1.

J1 \ J2	*Estrategia 1*	*Estrategia 2*	$\cdots$	*Estrategia m*
Estrategia 1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
Estrategia 2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Estrategia n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}

Tabla 1. *Matriz de pagos* $A = (a_{ij})$

Las filas de la matriz A se corresponden con las estrategias del jugador 1, mientras que sus columnas se corresponden con las del jugador 2.

Como en un juego bipersonal de suma cero, la suma de los pagos de ambos jugadores tiene que ser nula, los pagos al jugador 2 serán los dados por la matriz $-A$. Cuando hablemos de la ganancia del jugador 1 nos estaremos refiriendo al pago de la matriz A, sea positivo o negativo. Del mismo modo, la pérdida del jugador 2 se refiere al pago, positivo o negativo, de la matriz $-A$. Por tanto, el jugador 1 buscará una estrategia que maximice el pago de la matriz A, mientras que el jugador 2 buscará una que lo minimice.

La matriz de pagos, de forma visual, ayudará a elegir qué estrategias convienen a cada jugador, y así se podrá intentar resolver el juego. Pero ¿cuándo diremos que hemos resuelto el juego, en el sentido de que se ha encontrado una situación lo más favorable posible para ambos jugadores? Más adelante explicitaremos cómo hacerlo, suponiendo siempre que los jugadores buscan dicha situación y saben encontrarla.

Para encontrar estas soluciones tenemos que distinguir dos tipos de estrategias: las puras y las mixtas. A grandes rasgos, las estrategias puras son aquellas donde el jugador actúa de una única manera; mientras que, con las mixtas, el jugador selecciona su opción según una cierta probabilidad. La resolución del juego dependerá del tipo de estrategia que se utilice, como se muestra en las siguientes secciones.

2.1 Estrategias puras

Como se ha mencionado, en un juego cada jugador tiene que elegir la estrategia que más le conviene entre todas las posibles (no tiene que ser única). En esta sección definimos qué son las estrategias puras y mostramos qué debe tener en cuenta cada jugador para seleccionarlas, lo que nos llevará a introducir el importante lema minimax.

¿Y qué es, para un jugador dado, una ***estrategia pura***? Es cualquiera de las opciones individuales que tiene cada vez que se realiza el juego. Por ejemplo, si jugamos al conocido juego de niños "piedra, papel o tijera", entonces cada jugador tiene tres estrategias puras: elegir piedra, elegir papel o elegir tijera. Cuando el juego consista en repetirlo sucesivas veces, se entenderá que tener "piedra" como estrategia pura quiere decir que siempre elegirá "piedra" (lo que no le irá muy bien para ganar en el juego). Si su opción es elegir unas veces "piedra", otras "papel" y otras "tijera" esto es lo que se llamará una ***estrategia mixta***: más adelante precisaremos este concepto.

El siguiente ejemplo lo utilizaremos repetidamente a lo largo de esta sección.

Ejemplo 2.1. *El juego consiste en que cada jugador tiene que elegir un numero entre el* 1 *y el* 5*. Si el número elegido por un jugador es una unidad inferior al que elige el otro, entonces el primero gana dos puntos (que pierde el otro); pero si es inferior en dos o más unidades, entonces pierde un punto (que gana el otro). Si ambos eligen el mismo número, entonces el juego queda en empate. Recogiendo estas condiciones en una matriz de pagos, quedaría:*

$J1$ \ $J2$	1	2	3	4	5
1	0	2	−1	−1	−1
2	−2	0	2	−1	−1
3	1	−2	0	2	−1
4	1	1	−2	0	2
5	1	1	1	−2	0

En este ejemplo, cada jugador tiene cinco opciones. Por tanto, hay cinco estrategias puras y deseamos saber cuál (o cuáles) de ellas es la mejor para cada jugador. Como los jugadores buscan su beneficio propio, el jugador 1 pretenderá usar una estrategia que maximice el pago de la matriz, mientras que el jugador 2 querrá encontrar una estrategia que lo minimice.

Si el jugador 1 quiere asegurarse una mínima ganancia, escogerá aquella estrategia que maximice los pagos mínimos. Así, en el ejemplo 2.1, si el jugador 1 elige la estrategia 1 se asegura un pago mínimo de -1, pero si elige la estrategia 2 el pago mínimo es -2: luego preferiría la estrategia 1 a la estrategia 2. En el caso general $n \times m$, si el jugador 1 actúa de dicha forma, se asegurará un pago mínimo de $\max_{1\le i\le n} \min_{1\le j\le m} a_{ij}$.

Por otro lado, el jugador 2 querrá garantizarse una pérdida lo menor posible, es decir, minimizará los pagos máximos en cada columna de la matriz. De este modo, en el peor de los casos, el jugador 2 tendrá una perdida de $\min_{1\leq j\leq m}\max_{1\leq i\leq n} a_{ij}$ (se entiende que la pérdida, cuando es negativa, es en realidad una ganancia).

Lo dicho en los párrafos anteriores lleva a introducir la siguiente definición.

Definición 2.1. *Se considera un juego con matriz de pagos $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times m$. Llamamos* ***valor maximín*** *de A (o del juego con matriz de pagos A), y lo denotamos $\underline{v}$, al máximo de los mínimos de todas las filas de A. Es decir,*

$$\underline{v} = \max_{1\leq i\leq n}\min_{1\leq j\leq m} a_{ij}.$$

Llamamos ***valor minimax*** *de A (o del juego con matriz de pagos A), y lo denotamos $\overline{v}$, al mínimo de los máximos de todas las columnas de A:*

$$\overline{v} = \min_{1\leq j\leq m}\max_{1\leq i\leq n} a_{ij}.$$

Cuando $\overline{v} = \underline{v}$, entonces se dice que $v = \overline{v} = \underline{v}$ es el ***valor del juego****.*

En consecuencia, si los jugadores juegan como hemos dicho y p es el pago que recibe el jugador 1, como $\underline{v}$ es el menor pago que este puede asegurarse, entonces $p \geq \underline{v}$; y si el jugador 2 se garantiza que su pérdida p no sea mayor que $\overline{v}$, entonces $p \leq \overline{v}$; lo que lleva a que $\underline{v} \leq p \leq \overline{v}$. El siguiente resultado prueba con más rigor esta desigualdad.

Lema 2.1. *En cualquier juego, su valor maximín no es mayor que su valor minimax: $\underline{v} \leq \overline{v}$.*

Demostración:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de pagos del juego, y sea $n \times m$ su tamaño. Es trivial que $\min_{1\leq j\leq m} a_{ij} \leq a_{ik}$ para cualesquiera $i = 1,2,\ldots,n$, $k = 1,2,\ldots,m$. Por tanto,

$$\underline{v} = \max_{1\leq i\leq n}\min_{1\leq j\leq m} a_{ij} \leq \max_{1\leq i\leq n} a_{ik} \quad \text{para todo } k = 1,2,\ldots,m,$$

de donde se concluye inmediatamente el resultado: $\underline{v} \leq \min_{1\leq k\leq m}\max_{1\leq i\leq n} a_{ik} = \overline{v}$. ■

Veamos un ejemplo de obtención de los valores maximín y minimax.

Ejemplo 2.2. *Consideremos el juego del ejemplo 2.1. En el siguiente cuadro se obtienen los mínimos de cada fila y los máximos de cada columna de su matriz de pagos:*

$J1$ \ $J2$	1	2	3	4	5	
1	0	2	−1	−1	−1	→ mín = −1
2	−2	0	2	−1	−1	→ mín = −2
3	1	−2	0	2	−1	→ mín = −2
4	1	1	−2	0	2	→ mín = −2
5	1	1	1	−2	0	→ mín = −2
	↓ máx = 1	↓ máx = 2	↓ máx = 2	↓ máx = 2	↓ máx = 2	

Por tanto, los valores maximín y minimax del juego son $\underline{v} = \max\{-1,-2,-2,-2,-2\} = -1$ y $\overline{v} = \min\{1,2,2,2,2\} = 1$; en otras palabras, si ambos jugadores juegan como se ha *establecido, el jugador 1, en el peor de los casos, obtendrá un pago de $\underline{v} = -1$ (pagaría 1 al jugador 2); y el jugador 2 se garantiza que su pérdida no será mayor que $\overline{v} = 1$.*

Ahora, veamos a qué estrategias corresponden esos valores. Para el jugador 1, el pago mínimo $\underline{v} = -1$ lo asegurará si elige el número 1, es decir, la fila 1. Y el jugador 2 tendría que elegir el mismo número (la columna 1) si quiere que su pérdida no sea mayor que $\overline{v} = 1$. Con lo cual, siguiendo dichas estrategias, el pago obtenido sería 0: los jugadores quedarían en empate.

Observemos que, si alguno de los jugadores no usa la estrategia señalada, entonces el resultado podría cambiar a peor o a mejor para él. Por ejemplo, si el jugador 2 supone que el jugador 1 jugará con la estrategia 1, que le da el valor maximín, entonces podría seleccionar los números 3, 4 o 5 para ganar 1. Pero como el jugador 2 se arriesgue a seleccionar, por ejemplo, el número 3 y el jugador 1 no elija el 1 sino el 2, entonces el jugador 2 perdería 2 puntos, más que el valor minimax.

En el ejemplo 2.2 hemos considerado el caso de que un jugador elija su estrategia en función de su suposición acerca de la que usará su contrincante. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.2. *Dado un juego con matriz de pagos $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times m$, la estrategia i^0 del jugador 1 es una **estrategia de mejor respuesta** a la estrategia j del jugador 2 si satisface que $\max_{1\le i\le n} a_{ij} = a_{i^0 j}$; del mismo modo, la estrategia j^0 del jugador 2 es una estrategia de mejor respuesta a la estrategia i del jugador 1 si $\min_{1\le j\le m} a_{ij} = a_{ij^0}$.*

En el ejemplo 2.2 ha sucedido que $\underline{v} < \overline{v}$. Si sucediera que $\underline{v} = \overline{v} = v$ y los jugadores usaran las estrategias que les aseguran un pago no peor que v, esas estrategias y el pago que proporcionan pueden considerarse óptimos para ellos. Precisamos esta idea en la siguiente definición.

Definición 2.3. *Dado un juego con matriz de pagos $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times m$, un **punto de silla** para estrategias puras es un par (i^*, j^*), siendo i^* una fila de A y j^* una columna de A, tal que se satisface la siguiente condición:*

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \quad \textit{para cualesquiera } \ i = 1, 2, \dots, n \ \textit{ y } \ j = 1, 2, \dots, m. \tag{2.1}$$

*Además, en tal caso se dice que i^* y j^* son **estrategias puras óptimas** para los jugadores 1 y 2, respectivamente, y que $a_{i^*j^*}$ es **el pago óptimo** del juego.*

Observemos que si (i^*, j^*) es un punto de silla, entonces i^* es una estrategia de mejor respuesta para j^* y viceversa. Además, se tiene que el coeficiente $a_{i^*j^*}$ de la matriz de pagos es el menor de su fila y el mayor de su columna.

En el juego de los ejemplos 2.1 y 2.2, ninguno de los elementos menores de cada fila de la matriz de pagos es el mayor de su columna: luego ese juego no tiene puntos de silla, ni estrategias óptimas, ni pago óptimo para estrategias puras.

Como veremos en el ejemplo 2.3, un juego puede tener varias estrategias óptimas o puntos de silla, pero el pago óptimo es siempre el mismo: si (i^*, j^*) e (i^0, j^0) son sendos puntos de silla, entonces es claro que $a_{i^*j^*} \le a_{i^*j^0} \le a_{i^0j^0}$; y del mismo modo se obtiene la desigualdad contraria. El siguiente ejemplo ilustra este hecho y los conceptos de la definición 2.3.

Ejemplo 2.3. *En un juego para dos jugadores se tiene la siguiente matriz de pagos* (a_{ij})*, sobre la que señalamos los mínimos de cada fila y los máximos de cada columna:*

$J1$ \ $J2$	*Estrategia A*	*Estrategia B*	*Estrategia C*	
Estrategia 1	0	-1	1	$\to$ mín $= -1$
Estrategia 2	-1	-1	0	$\to$ mín $= -1$
Estrategia 3	1	-1	1	$\to$ mín $= -1$
	$\downarrow$ máx $= 1$	$\downarrow$ máx $= -1$	$\downarrow$ máx $= 1$	

Por tanto, los valores maximín y minimax del juego son $\underline{v} = \text{máx}\{-1,-1,-1\} = -1$ *y* $\overline{v} = \text{mín}\{1,-1,1\} = -1$*; como ambos coinciden, tenemos que* $v = -1$ *es el valor del juego.*

Luego cualquier estrategia del jugador 1 le proporciona el valor maximín, mientras que la que consigue el valor minimax al jugador 2 es la estrategia B. Por otra parte, observe que en este juego hay tres puntos de silla para estrategias puras, $(1,2)$, $(2,2)$ *y* $(3,2)$ *y, por tanto,* $a_{12} = a_{22} = a_{32}$ *es el pago óptimo. Y las estrategias óptimas coinciden con las que proporcionan el valor del juego. ¿Casualidad? Pronto veremos que no.*

En el ejemplo 2.3, a diferencia de lo que ocurría en el ejemplo 2.2, si el jugador 2 no juega con la estrategia que le da el valor minimax, nunca obtiene un pago mejor que con esta estrategia: si el jugador 1 elige las estrategias 1 o 3, entonces el jugador 2 siempre empeoraría su resultado; si el jugador 1 elige la estrategia 2, entonces el jugador 2 gana lo mismo tomando la estrategia A y gana menos si elige la estrategia C.

Como veremos, el hecho de que exista un punto de silla para estrategias puras va a garantizar que las estrategias óptimas sean la mejor opción para los jugadores, lo que justifica su nombre. Así, podremos decir que hemos resuelto el juego. El siguiente lema, conocido como ***lema minimax***, muestra cuándo se da esta situación.

Lema 2.2 (minimax). *Sea* $A = (a_{ij})$ *la matriz de pagos de un juego. Este juego tiene un punto de silla* (i^*, j^*) *para estrategias puras si y solo si* $\overline{v} = \underline{v}$*. Además, en tal caso, estos valores coinciden con el pago óptimo:* $\overline{v} = \underline{v} = a_{i^*j^*}$*. Y, por tanto, las estrategias óptimas coinciden con las que proporcionan los valores maximín y minimax.*

Demostración:

Sea $n \times m$ el tamaño de la matriz A. Suponiendo que (i^*, j^*) es un punto de silla, es decir, que cumple (2.1), entonces

$$\overline{v} = \min_{1\le j\le m} \max_{1\le i\le n} a_{ij} \le \max_{1\le i\le n} a_{ij^*} = a_{i^*j^*} = \min_{1\le j\le m} a_{i^*j} \le \max_{1\le i\le n} \min_{1\le j\le m} a_{ij} = \underline{v};$$

y, por el lema 2.1, se concluye que $\overline{v} = \underline{v}$.

Recíprocamente, si $\overline{v} = \underline{v}$, esto es, si $\min_{1\le j\le m} \max_{1\le i\le n} a_{ij} = \max_{1\le i\le n} \min_{1\le j\le m} a_{ij}$, sean j^* e i^* subíndices tales que $\overline{v} = \max_{1\le i\le n} a_{ij^*}$ y $\underline{v} = \min_{1\le j\le m} a_{i^*j}$. Entonces $a_{ij^*} \le \overline{v} = \underline{v} \le a_{i^*j}$ para cualesquiera $i = 1,2,\ldots,n$ y $j = 1,2,\ldots,m$. Tomando aquí $j = j^*$ e $i = i^*$ se obtiene que $a_{i^*j^*} = \overline{v} = \underline{v}$ y, por tanto, $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ para cualesquiera $i = 1,2,\ldots,n$ y $j = 1,2,\ldots,m$, es decir, (i^*, j^*) es un punto de silla y el pago óptimo es $a_{i^*j^*}$.

Finalmente, como

$$\overline{v} = \min_{1\le j\le m} \max_{1\le i\le n} a_{ij} = a_{i^*j^*} = \max_{1\le i\le n} \min_{1\le j\le m} a_{ij} = \underline{v},$$

se concluye que las estrategias óptimas coinciden con las que proporcionan los valores maximín y minimax.

■

2.2 Estrategias mixtas

En la anterior sección, los jugadores buscaban una estrategia pura fija que les permitiera asegurarse una ganancia mínima o una pérdida no mayor que cierta cantidad. Pero hemos visto (ejemplo 2.2) que este tipo de estrategias no siempre proporciona un pago óptimo. En esta sección nos preguntamos si se podrá encontrar otro tipo de estrategias (no puras) que permitan optimizar los pagos a ambos jugadores. La respuesta la obtendremos como consecuencia del teorema minimax de Von Neumann.

Conceptos fundamentales

En primer lugar necesitamos introducir un nuevo tipo de estrategias, que concretamos en la siguiente definición.

Definición 2.4. *Para un juego dado por una matriz $n \times m$, una **estrategia mixta** para el jugador 1 es un vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de componentes no negativas tal que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, donde x_i representa la probabilidad de que la fila i sea la estrategia usada por el jugador 1.*

Del mismo modo, una estrategia mixta para el jugador 2 es un vector $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ de componentes no negativas tal que $\sum_{j=1}^m y_j = 1$, donde y_j representa la probabilidad de que la columna j sea la estrategia usada por el jugador 2.

A los conjuntos de estrategias mixtas para los jugadores 1 y 2 los denotaremos por S_n y S'_m, respectivamente.

Observamos que si el jugador 1 usa una estrategia mixta X, con $x_i = 1$ para algún $i = 1, 2, \dots, n$, esto es, $X = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, en realidad está jugando con la fila i como estrategia pura. Y lo mismo ocurre si el jugador 2 usa una estrategia mixta con $y_j = 1$ para algún $j = 1, 2, \dots, m$. Por tanto, podemos decir que las estrategias puras son un caso particular de las estrategias mixtas.

En la sección anterior, cuando queríamos saber qué pago podríamos obtener al usar una estrategia pura, solo teníamos que examinar la matriz de pagos: si, por ejemplo, el jugador 1 juega con la fila 2 y piensa que el jugador 2 usa la columna 3, entonces sabe que su pago sería el dado por el elemento a_{23} de la matriz. Pero al jugar con estrategias mixtas, el pago que podrían recibir dependerá de la combinación de estrategias puras que usen y de la probabilidad que le corresponde a cada una. Luego lo que se podrá determinar es la esperanza del pago que produce la elección de determinadas estrategias mixtas, como vemos en la siguiente definición.

Definición 2.5. *Dado un juego de matriz $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times m$, si el jugador 1 elige la estrategia $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n$ y el jugador 2 elige la estrategia $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in S'_m$, entonces el **pago esperado** del jugador 1 (o del juego) para esas estrategias es*

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} P({}_iA, A_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} P({}_iA) P(A_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = XAY^T,$$

donde ${}_iA$ es el i-ésimo vector fila de la matriz A y A_j es el j-ésimo vector columna.

Cuando hemos escrito $P({}_iA, A_j)$, nos referíamos a la probabilidad de que el jugador 1 use la fila i y de que el jugador 2 use la columna j. La elección independiente de estrategia por cada jugador, que estamos suponiendo, hace que $P({}_iA, A_j) = P({}_iA)P(A_j)$.

Como estamos en juegos bipersonales de suma cero, el pago esperado del jugador 2 será $-E(X,Y)$.

Si el jugador 1 escogiera la estrategia pura i ($X = (0,\dots,0,1_i,0,\dots,0)$), entonces el pago esperado se representará por

$$E(i,Y) = {}_iAY^T = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j;$$

y si el jugador 2 jugara solo con la columna j ($Y = (0,\dots,0,1_j,0,\dots,0)$), entonces el pago esperado se representará por

$$E(X,j) = XA_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}.$$

El pago $E(X,Y)$ puede obtenerse en función de los pagos $E(i,Y)$ y $E(X,j)$:

$$E(X,Y) = XAY^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i E(i,Y) = \sum_{j=1}^{m} E(X,j)y_j. \qquad (2.2)$$

A continuación, mostraremos cómo obtener las estrategias que proporcionen el mejor pago esperado a cada jugador. El jugador 1 buscará maximizar el pago esperado de una manera similar a la utilizada para estrategias puras: considerará cada una de sus estrategias X y supondrá que el jugador 2 podrá elegir la estrategia Y que minimice el pago esperado; entonces el jugador 1 tomará la estrategia que maximice esos pagos esperados mínimos. Esta idea la recoge la siguiente definición de valor maximín para estrategias mixtas. Por su parte, el jugador 2 considerará el máximo pago esperado que podría obtener jugador 1 para cada una de sus estrategias Y, y querrá minimizar esos pagos máximos, obteniéndose lo que vamos a llamar valor minimax para estrategias mixtas.

Definición 2.6. *Se considera un juego con matriz de pagos $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times m$. Llamamos **valor maximín** de A (o del juego) para estrategias mixtas, y lo denotamos v^-, al siguiente valor:*

$$v^- = \max_{X\in S_n}\min_{Y\in S'_m} E(X,Y) = \max_{X\in S_n}\min_{Y\in S'_m} XAY^T.$$

*Y el **valor minimax** de A (o del juego) para estrategias mixtas, denotado por v^+, es*

$$v^+ = \min_{Y\in S'_m}\max_{X\in S_n} E(X,Y) = \min_{Y\in S'_m}\max_{X\in S_n} XAY^T.$$

*Cuando $v^- = v^+$, entonces se dice que $v = v^- = v^+$ es el **valor del juego**.*

Otras dos definiciones que se extienden a estrategias mixtas son las siguientes.

Definición 2.7. *Dado un juego con matriz de pagos $A = (a_{ij})$, de tamaño $n\times m$, y dada una estrategia $Y \in S'_m$ del jugador 2, se dice que $X^0 \in S_n$ es una **estrategia de mejor respuesta** para Y si satisface que $\max_{X\in S_n} E(X,Y) = E(X^0,Y)$. Del mismo modo, dada $X \in S_n$, Y^0 es una estrategia de mejor respuesta para X si $\min_{Y\in S'_m} E(X,Y) = E(X,Y^0)$.*

Definición 2.8. *Dado un juego con matriz de pagos $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times m$, un* ***punto de silla*** *para estrategias mixtas es un par $(X^*, Y^*) \in S_n \times S'_m$ que satisface lo siguiente:*

$$E(X, Y^*) \le E(X^*, Y^*) \le E(X^*, Y) \quad \text{para cualesquiera } X \in S_n \text{ e } Y \in S'_m. \tag{2.3}$$

Entonces se dice que X^* e Y^* son ***estrategias mixtas óptimas*** *para los respectivos jugadores y que $E(X^*, Y^*)$ es el* ***pago esperado óptimo*** *del juego.*

Como consecuencia de la definición, si el jugador 1 elige X^* y el jugador 2 no toma Y^*, este podría tener un pago esperado mayor que tomando Y^*; y si el jugador 1 utiliza una estrategia distinta a X^* pero el jugador 2 elige Y^*, entonces el jugador 1 podrá tener un pago esperado menor que seleccionando X^*.

Como con estrategias puras, si (X^*,Y^*) es un punto de silla, entonces X^* es la estrategia de mejor respuesta del jugador 1 para la estrategia Y^* del jugador 2 y viceversa.

El teorema minimax de Von Neumann

Es bastante normal que un juego no tenga punto de silla para estrategias puras; vimos que su existencia la caracteriza el lema 2.2. Sin embargo, probaremos que siempre lo tiene para estrategias mixtas y que esto es porque se da una condición análoga a la de dicho lema: siempre se cumple la igualdad $v^- = v^+$. Para llegar a probar esto necesitamos introducir un resultado importante (se aplica en muchos ámbitos, no solo en teoría de juegos), debido a J. Von Neumann y conocido como el ***teorema minimax***.

Teorema 2.1 (minimax). *Sea $f : C \times D \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $C \subset \mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos, cerrados y acotados. Supongamos que, para cada $y \in D$, la función $x \mapsto f(x,y)$, definida en C, es cóncava; y que, para cada $x \in C$, la función $y \mapsto f(x,y)$, de dominio D, es convexa. Entonces*

$$\min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x,y) = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y).$$

Además, existe $(x^*, y^*) \in C \times D$ tal que $f(x^*, y^*) = \min_{y \in D} f(x^*, y) = \max_{x \in C} f(x, y^*)$.

Este resultado aparece por primera vez en Von Neumann [7], pero ha sido probado después de diversas formas. Es una demostración compleja, que no incluimos aquí porque en el capítulo siguiente probaremos el teorema de Nash, que utiliza herramientas similares y, en cuanto a la teoría de juegos, tiene una aplicación más amplia. Una extensión del teorema 2.1, aplicable a juegos para varios jugadores, puede encontrarse en Von Neumann y Morgenstern [8].

Como corolario del teorema minimax se tiene el siguiente resultado fundamental.

Teorema 2.2. *Dado un juego con matriz de pagos $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times m$, entonces el juego tiene un valor v para estrategias mixtas, es decir,*

$$v^+ = \min_{Y \in S'_m} \max_{X \in S_n} E(X, Y) = \max_{X \in S_n} \min_{Y \in S'_m} E(X, Y) = v^- \ (= v). \tag{2.4}$$

Además, existe $(X^*, Y^*) \in S_n \times S'_m$ tal que

$$E(X^*, Y^*) = \min_{Y \in S'_m} E(X^*, Y) = \max_{X \in S_n} E(X, Y^*). \tag{2.5}$$

Demostración:

Es inmediato que la función definida en $S_n \times S'_m$ mediante

$$E(X,Y) = E(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

es continua, y que su dominio es cerrado, acotado y convexo (pues así lo son $S_n \subset \mathbb{R}^n$ y $S'_m \subset \mathbb{R}^m$). Como E es lineal en cada variable, también se cumple que $X \mapsto E(X,Y)$ es cóncava y que $Y \mapsto E(X,Y)$ es convexa. Por tanto, la tesis de este teorema es una inmediata consecuencia del teorema 2.1.

■

En el enunciado de los resultados que siguen se dará por supuesta la hipótesis básica del teorema 2.2: que se está considerando un juego de suma cero con matriz de pagos $A = (a_{ij})$ que es de tamaño $n \times m$; y que, por tanto, el juego tiene un valor v.

El teorema 2.2 nos está diciendo también que todo juego tiene un punto de silla, como muestra el siguiente corolario.

Corolario 2.2.1. *Las ecuaciones* (2.3) *y* (2.5) *son equivalentes. Por tanto, todo juego tiene un punto de silla.*

Demostración:

Si $(X^*, Y^*) \in S_n \times S'_m$ satisface (2.5), entonces $E(X^*, Y) \geq E(X^*, Y^*) \geq E(X, Y^*)$ para cualesquiera $X \in S_n$ e $Y \in S'_m$, es decir, se tiene (2.3). El recíproco es igualmente trivial.

■

Este corolario junto con el teorema 2.2 puede verse como una extensión de la primera parte del lema 2.2 a estrategias mixtas. El siguiente resultado extiende la segunda.

Corolario 2.2.2. *El pago esperado óptimo coincide con el valor del juego: $E(X^*, Y^*) = v$ para cualquier punto de silla (X^*, Y^*).*

Demostración:

Sea $(X^*, Y^*) \in S_n \times S'_m$ un punto de silla. Luego, aplicando el corolario 2.2.1, satisface la ecuación (2.5). Entonces, aplicando esta y la ecuación (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned} v &= \min_{Y \in S'_m} \max_{X \in S_n} E(X,Y) \leq \max_{X \in S_n} E(X, Y^*) = E(X^*, Y^*) \\ &= \min_{Y \in S'_m} E(X^*, Y) \leq \max_{X \in S_n} \min_{Y \in S'_m} E(X,Y) = v; \end{aligned}$$

de donde se concluye que $E(X^*, Y^*) = v$, como queríamos probar.

■

Como consecuencia del corolario 2.2.2 se obtiene otro más.

Corolario 2.2.3. *Si $X^1 \in S_n$ e $Y^2 \in S'_m$ son estrategias óptimas, entonces (X^1, Y^2) es un punto de silla.*

Demostración:

Que X^1 e Y^2 sean estrategias óptimas significa que forman parte de respectivos puntos de silla (X^1, Y^1) y (X^2, Y^2). Aplicando el corolario 2.2.2 y la ecuación (2.5), que satisfacen los puntos de silla por el corolario 2.2.1, se tiene que

$$E(X^1, Y^2) \geq \min_{Y \in S'_m} E(X^1, Y) = E(X^1, Y^1) = E(X^2, Y^2) = \max_{X \in S_n} E(X, Y^2) \geq E(X^1, Y^2).$$

Como consecuencia, $\min_{Y\in S'_m} E(X^1,Y) = v = E(X^1,Y^2) = \max_{X\in S_n} E(X,Y^2)$, es decir, (X^1,Y^2) satisface la ecuación (2.5), de donde, aplicando de nuevo el corolario 2.2.1, se concluye que (X^1,Y^2) es un punto de silla.

■

El corolario 2.2.3 es un recíproco de la definición de estrategia óptima. Ahora puede decirse que $X^1 \in S_n$ e $Y^2 \in S'_m$ son estrategias óptimas si y solo si (X^1,Y^2) es un punto de silla.

Propiedades de las estrategias óptimas

A continuación se introducen una serie de resultados que conducirán hacia otros teoremas fundamentales de esta sección. A la vez, iremos obteniendo algunas propiedades de los conceptos estudiados; en particular, examinaremos el papel que juegan las estrategias puras con respecto a las mixtas en diferentes situaciones.

El primero de dichos resultados presenta una propiedad que basta que cumplan las estrategias puras para que la cumplan también las estrategias mixtas.

Lema 2.3. *Sean $X \in S_n$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que $a \le E(X,j)$ para todo $j = 1,2,\dots,m$. Entonces $a \le E(X,Y)$ para cualquier $Y \in S'_m$. Del mismo modo, si $Y \in S'_m$ satisface que $a \ge E(i,Y)$ para todo $i = 1,2,\dots,n$, entonces $a \ge E(X,Y)$ para cualquier $X \in S_n$.*

Demostración:

Sea $Y = (y_1,y_2,\dots,y_m)$ cualquier estrategia mixta del jugador 2. Si en la desigualdad $E(X,j) = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \ge a$ multiplicamos por y_j y sumamos en j obtenemos, aplicando la ecuación (2.2), que

$$E(X,Y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} y_j \ge \sum_{j=1}^m a y_j = a,$$

ya que $\sum_{j=1}^m y_j = 1$. Del mismo modo se prueba la segunda parte del lema.

■

Como consecuencia de este lema, se puede decir que si X es una buena estrategia para el jugador 1 cuando el jugador 2 usa cualquier estrategia pura (porque obtiene una ganancia relativamente alta, mayor o igual que cierta cantidad a), entonces X seguirá siendo una buena estrategia cuando el jugador 2 juegue con cualquier estrategia mixta. La segunda parte del lema tiene una interpretación similar en cuanto a buenas estrategias para el jugador 2.

Un paso más en la misma dirección se da en el siguiente lema, que muestra —como corolario del lema 2.3— que la estrategia de mejor respuesta a una dada puede tomarse siempre como una estrategia pura.

Lema 2.4. *Sea $Y \in S'_m$ una estrategia cualquiera del jugador 2. Entonces*

$$\max_{X\in S_n} E(X,Y) = \max_{1\le i\le n} E(i,Y);$$

y si $X \in S_n$ es cualquier estrategia del jugador 1, entonces

$$\min_{Y\in S'_m} E(X,Y) = \min_{1\le j\le m} E(X,j).$$

Demostración:

La primera parte del lema se prueba de modo semejante a la segunda, que demostramos a continuación. Sea $X \in S_n$. Como toda estrategia pura es también mixta, es trivial que $\min_{Y \in S'_m} E(X,Y) \leq \min_{1 \leq j \leq m} E(X,j)$. Para demostrar la desigualdad contraria, denotemos $a = \min_{1 \leq j \leq m} E(X,j)$. Por tanto, $a \leq E(X,j)$ para todo $j = 1,2,\ldots,m$. Aplicando el lema 2.3, se tiene que $a = \min_{1 \leq j \leq m} E(X,j) \leq E(X,Y)$ para cualquier $Y \in S'_m$ y, por tanto, $\min_{1 \leq j \leq m} E(X,j) \leq \min_{Y \in S'_m} E(X,Y)$, que prueba la desigualdad buscada.

■

El siguiente lema muestra, entre otras cosas, algo que se podía esperar: la relación existente del valor del juego con los valores maximín y minimax para estrategias puras.

Lema 2.5. *Cualquier juego satisface la siguiente desigualdad:*

$$\underline{v} \leq \max_{X \in S_n} \min_{1 \leq j \leq m} E(X,j) = v = \min_{Y \in S'_m} \max_{1 \leq i \leq n} E(i,Y) \leq \overline{v}. \tag{2.6}$$

Luego el valor del juego para estrategias mixtas coincide con el valor del juego para estrategias puras si este existe, en cuyo caso las estrategias mixtas óptimas pueden elegirse entre las estrategias puras.

Demostración:

Aplicando el lema 2.4 a la ecuación (2.4) dada por el teorema 2.2, se tiene que

$$v = \max_{X \in S_n} \min_{1 \leq j \leq m} E(X,j) = \min_{Y \in S'_m} \max_{1 \leq i \leq n} E(i,Y).$$

Si restringimos la expresión anterior a estrategias puras, esto es, si solo consideramos los vectores X e Y con una componente igual a 1 y las demás nulas, entonces,

$$\begin{aligned}
\max_{X \in S_n} \min_{1 \leq j \leq m} E(X,j) &= \max_{X \in S_n} \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} = \underline{v}, \\
\min_{Y \in S'_m} \max_{1 \leq i \leq n} E(i,Y) &= \min_{Y \in S'_m} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq \min_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij} = \overline{v},
\end{aligned}$$

de donde se concluye la ecuación (2.6). Y si existe un valor del juego para estrategias puras es porque $\underline{v} = \overline{v}$, de donde la ecuación (2.6) implica que coincide con v, el valor para estrategias mixtas; y, por el lema 2.2, con alguno de los coeficientes a_{kl} de la matriz del juego. Por tanto, las estrategias $X = k$ e $Y = l$ son óptimas.

■

El siguiente lema da un penúltimo paso antes de la obtención de uno de los principales resultados de esta sección.

Lema 2.6. *Sea $w \in \mathbb{R}$. Si existe $X \in S_n$ tal que $w \leq E(X,j)$ para todo $j = 1,2,\ldots,m$, entonces $w \leq v$. Y si existe $Y \in S'_m$ tal que $w \geq E(i,Y)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$, entonces $w \geq v$.*

Demostración:

Sea (X^*,Y^*) un punto de silla del juego. Si $w \leq E(X,j) = XA_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$ para todo $j = 1,2,\ldots,m$, entonces, multiplicando en esa desigualdad por y_j^*, sumando los j y aplicando (2.2), obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} w y_j^* = w \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j^* = XAY^{*T} = E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) = v,$$

como queríamos probar. Y si $w \geq E(i,Y) = {}_iAY^T = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* w = w \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^* a_{ij} y_j = X^*AY^T = E(X^*,Y) \geq E(X^*,Y^*) = v,$$

lo que completa la demostración.

■

A continuación introducimos el lema más importante de esta serie, que proporciona condiciones suficientes para obtener un punto de silla.

Lema 2.7. *Sean $w \in \mathbb{R}$ y $(X^0,Y^0) \in S_n \times S'_m$. Si $E(i,Y^0) \leq w \leq E(X^0,j)$ para cualesquiera $i = 1,2,\ldots,n$ y $j = 1,2,\ldots,m$, entonces $w = v$ y (X^0,Y^0) es un punto de silla.*

Demostración:

Aplicando el lema 2.6, se tiene que $v \leq w \leq v$, es decir, $w = v$. Por tanto, la hipótesis de este lema se puede reescribir como sigue:

$$E(i,Y^0) \leq v \leq E(X^0,j) \text{ para cualesquiera } i = 1,2,\ldots,n \text{ y } j = 1,2,\ldots,m,$$

de donde, aplicando el lema 2.3,

$$E(X,Y^0) \leq v \leq E(X^0,Y) \text{ para cualesquiera } X \in S_n \text{ e } Y \in S'_m. \tag{2.7}$$

En particular, tomando $X = X^0$ e $Y = Y^0$ en la desigualdad (2.7), obtenemos que $E(X^0,Y^0) = v$. Por tanto, la ecuación (2.7) se puede reescribir como sigue:

$$E(X,Y^0) \leq E(X^0,Y^0) \leq E(X^0,Y) \text{ para cualesquiera } X \in S_n \text{ e } Y \in S'_m,$$

es decir, (X^0,Y^0) es un punto de silla, como queríamos probar.

■

Llegamos finalmente a un resultado fundamental, consecuencia casi inmediata de los anteriores, que caracteriza tanto el valor de un juego como sus puntos de silla.

Teorema 2.3. *En un juego, $v \in \mathbb{R}$ es su valor y $(X^*,Y^*) \in S_n \times S'_m$ es un punto de silla si y solo si*

$$E(i,Y^*) \leq v \leq E(X^*,j), \text{ para cualesquiera } i = 1,2,\ldots,n, \text{ y } j = 1,2,\ldots,m. \tag{2.8}$$

Demostración:

La condición suficiente coincide con lo que afirma el lema 2.7. En cuanto a la condición necesaria, si (X^*,Y^*) es un punto de silla, entonces el corolario 2.2.2 asegura que $E(X^*,Y^*) = v$, donde v es el valor del juego. Luego, tomando $X = i$ e $Y = j$ en la ecuación (2.3) para cualesquiera $i = 1,2,\ldots,n$ y $j = 1,2,\ldots,m$, se obtiene (2.8), como queríamos demostrar.

■

El siguiente corolario del teorema 2.3 proporciona un modo de comprobar si una estrategia es óptima, siempre que se conozca el valor del juego.

Corolario 2.3.1. *Si $X^0 \in S_n$ satisface que $v \leq E(X^0,j)$ para todo $j = 1,2,\ldots,m$, entonces X^0 es una estrategia óptima para el jugador 1. Si $Y^0 \in S'_m$ satisface que $E(i,Y^0) \leq v$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$, entonces Y^0 es una estrategia óptima para el jugador 2.*

Demostración:

Sea $(X^*, Y^*) \in S_n \times S'_m$ un punto de silla del juego. Entonces, por el teorema 2.3, (X^*, Y^*) satisface la ecuación (2.8). Por tanto, aplicando nuestras hipótesis, se tiene que $E(i, Y^*) \leq v \leq E(X^0, j)$ y $E(i, Y^0) \leq v \leq E(X^*, j)$ para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. Entonces, el teorema 2.3 asegura que (X^0, Y^*) y (X^*, Y^0) son puntos de silla. Por tanto, X^0 e Y^0 son estrategias óptimas para los respectivos jugadores.

■

El siguiente teorema completa el corolario 2.3.1, proporcionando una caracterización de las estrategias óptimas de un juego.

Teorema 2.4. *Una estrategia $X^0 \in S_n$ es óptima si y solo si $v = \min_{1 \leq j \leq m} E(X^0, j)$; y una estrategia $Y^0 \in S'_m$ es óptima si y solo si $v = \max_{1 \leq i \leq n} E(i, Y^0)$.*

Demostración:

Si $X^0 \in S_n$ es óptima, entonces forma parte de un punto de silla (X^0, Y^*). Luego $E(X^0, Y^*) \leq E(X^0, Y)$ para todo $Y \in S'_m$, de donde, aplicando el teorema 2.2 y el corolario 2.2.2,

$$v = E(X^0, Y^*) \leq \min_{Y \in S'_m} E(X^0, Y) \leq \max_{X \in S_n} \min_{Y \in S'_m} E(X, Y) = v.$$

Por tanto, aplicando el lema 2.4,

$$v = \min_{Y \in S'_m} E(X^0, Y) = \min_{1 \leq j \leq m} E(X^0, j).$$

Recíprocamente, si $v = \min_{1 \leq j \leq m} E(X^0, j)$, entonces se tiene que $v \leq E(X^0, j)$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m$, de donde el corolario 2.3.1 concluye que X^0 es una estrategia óptima.

La segunda parte del teorema se demuestra de forma similar.

■

El siguiente resultado proporciona unas ecuaciones que satisfacen el valor del juego y ciertas estrategias óptimas. En la práctica, dichas ecuaciones permitirán muchas veces determinar ese valor y esas estrategias.

Teorema 2.5 (de equilibrio). *Si Y^0 es una estrategia óptima para el jugador 2 tal que $y_k^0 > 0$, entonces $v = E(X^*, k)$ para cualquier estrategia óptima X^* del jugador 1. Del mismo modo, si X^0 es una estrategia óptima para el jugador 1, entonces $v = E(k, Y^*)$ para todo k tal que $x_k^0 > 0$ y para cualquier estrategia óptima Y^*.*

Demostración:

Sea Y^0 una estrategia óptima tal que $y_k^0 > 0$. Como consecuencia del teorema 2.4, si X^* es óptima para el jugador 1, entonces $v \leq E(X^*, j)$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m$. En particular, $v \leq E(X^*, k)$. Veamos que no puede ocurrir que $v < E(X^*, k)$. Si ocurriese esto, aplicando los corolarios 2.2.2 y 2.2.3 y la ecuación (2.2) se tiene que

$$v = E(X^*, Y^0) = \sum_{j=1}^{m} E(X^*, j) y_j^0 > v y_k^0 + \sum_{j=1, j \neq k}^{m} v y_j^0 = v,$$

lo que es una contradicción. Del mismo modo se prueba la segunda parte del teorema.

■

A continuación, aplicamos los teoremas 2.3 y 2.5 a un ejemplo.

Ejemplo 2.4. *Se considera el juego presentado en el ejemplo 2.1. En el ejemplo 2.2 vimos que sus valores maximín y minimax para estrategias puras no coincidían. Sin embargo, para estrategias mixtas sabemos que coinciden y son el valor del juego. Sea* $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *una estrategia del jugador 1 e* $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ *una estrategia del jugador 2. El teorema 2.3 asegura que* v *es el valor del juego y* (X, Y) *es un punto de silla si y solo si se satisfacen las diez siguientes condiciones:*

$$
\begin{aligned}
E(1,Y) &= (0,2,-1,-1,-1)(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^T = 2y_2 - y_3 - y_4 - y_5 \leq v,\\
E(2,Y) &= (-2,0,2,-1,-1)(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^T = -2y_1 + 2y_3 - y_4 - y_5 \leq v,\\
E(3,Y) &= (1,-2,0,2,-1)(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^T = y_1 - 2y_2 + 2y_4 - y_5 \leq v,\\
E(4,Y) &= (1,1,-2,0,2)(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^T = y_1 + y_2 - 2y_3 + 2y_5 \leq v,\\
E(5,Y) &= (1,1,1,-2,0)(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^T = y_1 + y_2 + y_3 - 2y_4 \leq v,\\
E(X,1) &= (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)(0,-2,1,1,1)^T = -2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq v,\\
E(X,2) &= (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)(2,0,-2,1,1)^T = 2x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 \geq v,\\
E(X,3) &= (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)(-1,2,0,-2,1)^T = -x_1 + 2x_2 - 2x_4 + x_5 \geq v,\\
E(X,4) &= (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)(-1,-1,2,0,-2)^T = -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 \geq v,\\
E(X,5) &= (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)(-1,-1,-1,2,0)^T = -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \geq v.
\end{aligned}
$$

Además, para que X *e* Y *sean estrategias mixtas deben satisfacer también que sus componentes sean no negativas y cumplan que* $\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{j=1}^{5} y_j = 1$. *Por ahora, dejamos aquí la aplicación del teorema 2.3. Más adelante, al final de la sección 2.3, la retomaremos.*

Por otra parte, si suponemos que existen estrategias óptimas X *e* Y *cuyas componentes son todas positivas (lo que no siempre tiene que ocurrir), el teorema 2.5 transforma las diez inecuaciones anteriores en igualdades, y el problema se reduciría a dos sistemas de seis ecuaciones con seis incógnitas (cuyas soluciones deben satisfacer lo supuesto: que* $x_k > 0$ *e* $y_k > 0$ *para todo* $k = 1, 2, 3, 4, 5$*; si no, no sirven para nada):*

$$
\left\{
\begin{aligned}
-2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= v\\
2x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= v\\
-x_1 + 2x_2 - 2x_4 + x_5 &= v\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 &= v\\
-x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= v\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1
\end{aligned}
\right.
\qquad y \qquad
\left\{
\begin{aligned}
2y_2 - y_3 - y_4 - y_5 &= v\\
-2y_1 + 2y_3 - y_4 - y_5 &= v\\
y_1 - 2y_2 + 2y_4 - y_5 &= v\\
y_1 + y_2 - 2y_3 + 2y_5 &= v\\
y_1 + y_2 + y_3 - 2y_4 &= v\\
y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 1
\end{aligned}
\right.
$$

Pues bien, ambos sistemas tienen solución única: $X = \left(\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right) = Y$ *y* $v = 0$ *(en los dos sistemas). Lo que, aplicando el teorema 2.3 (en el que la condición (2.8) se satisface toda ella con igualdades), lleva a que* (X, Y) *es un punto de silla y el valor del juego o pago esperado óptimo es* $v = E(X, Y) = 0$. *Por tanto, podemos decir que hemos resuelto el juego.*

Si recordamos lo obtenido con las estrategias puras en el ejemplo 2.2, el jugador 1, para asegurar un pago mínimo de $\underline{v} = -1$, *tenía elegir la estrategia pura* $X = (1, 0, 0, 0, 0)$*; y el jugador 2, para que su pérdida no fuese mayor que* $\overline{v} = 1$, *debía elegir* $Y = (1, 0, 0, 0, 0)$. *Si ambos jugaban con esas estrategias, entonces el pago que obtenía el jugador 1 era* $a_{11} = 0$, *que es el mismo resultado que se ha obtenido con estrategias mixtas. Esto no quiere decir que sea siempre así; de hecho, no es frecuente que suceda. Finalmente, observemos que se ha cumplido lo que afirmaba el lema 2.5:* $\underline{v} = -1 \leq v = 0 \leq \overline{v} = 1$.

2.3 Métodos de resolución de juegos

En las secciones anteriores hemos resuelto teóricamente los juegos de suma cero para estrategias puras y mixtas. En esta mostraremos algunos métodos que lo facilitan. De especial interés son los que resuelven juegos con matrices de pago de todo tamaño.

Juegos 2×2

Cuando la matriz A del juego es del menor tamaño posible (2×2), esto es,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

vamos a poder encontrar las estrategias mixtas óptimas con fórmulas explícitas.

Lo primero que hay que hacer es comprobar si el juego tiene un valor para estrategias puras, en cuyo caso el lema 2.5 asegura que coincide con el valor del juego para estrategias mixtas, y que las estrategias óptimas pueden elegirse entre las estrategias puras. En el caso contrario, es decir, si los valores maximín y minimax para estrategias puras no coinciden ($\underline{v} < \overline{v}$), se puede aplicar el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *Sea un juego con matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño 2×2 tal que $\underline{v} < \overline{v}$. Entonces un punto de silla del juego (X^*, Y^*) es el dado por $X^* = (x^*, 1 - x^*)$, $Y^* = (y^*, 1 - y^*)$, donde*

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \quad e \quad y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

y el valor del juego es

$$v = E(X^*, Y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Demostración:

Los valores maximín y minimax para estrategias puras se obtienen como sigue:

$$\begin{array}{cc|l} a_{11} & a_{12} & \to \min\{a_{11}, a_{12}\} \\ a_{21} & a_{22} & \to \min\{a_{21}, a_{22}\} \\ \hline \downarrow & \downarrow & \\ \max\{a_{11}, a_{21}\} & \max\{a_{12}, a_{22}\} & \end{array}$$

Por hipótesis,

$$\underline{v} = \max\{\min\{a_{11}, a_{12}\}, \min\{a_{21}, a_{22}\}\} < \overline{v} = \min\{\max\{a_{11}, a_{21}\}, \max\{a_{12}, a_{22}\}\}.$$

Ahora probaremos, por reducción al absurdo, que el denominador de las expresiones de x^*, y^* y v no puede anularse. Supongamos lo contrario, que $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0$. Distinguimos entonces dos casos:

- Si $a_{11} \leq a_{12}$, entonces $0 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \leq -a_{21} + a_{22}$. Luego $a_{21} \leq a_{22}$, de donde $\underline{v} = \max\{a_{11}, a_{21}\}$. Por el mismo motivo, $\max\{a_{11}, a_{21}\} \leq \max\{a_{12}, a_{22}\}$ y, por tanto, $\overline{v} = \max\{a_{11}, a_{21}\} = \underline{v}$, contra nuestras hipótesis.
- Si $a_{11} > a_{12}$, entonces $0 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} > -a_{21} + a_{22}$. Luego $a_{21} > a_{22}$, de donde $\underline{v} = \max\{a_{12}, a_{22}\}$. Además, $\max\{a_{12}, a_{22}\} < \max\{a_{11}, a_{21}\}$ y, por tanto, $\overline{v} = \max\{a_{12}, a_{22}\} = \underline{v}$, contra nuestras hipótesis.

Luego se ha probado que $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \neq 0$.

Las estrategias mixtas de los jugadores 1 y 2 son respectivamente de la forma $X = (x, 1-x)$ e $Y = (y, 1-y)$, con $x, y \in [0,1]$. El pago esperado para estas estrategias es

$$E(X,Y) = XAY^T = xy(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + x(a_{12} - a_{22}) + y(a_{21} - a_{22}) + a_{22}.$$

Supongamos ahora que $x, y \in (0,1)$, es decir, que las dos componentes de X e Y sean positivas. Si tales estrategias fueran óptimas, el teorema 2.5 asegura que deben satisfacer las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
v &= E(X,1) = (x, 1-x)(a_{11}, a_{21})^T = xa_{11} + (1-x)a_{21} = (a_{11} - a_{21})x + a_{21},\\
v &= E(X,2) = (x, 1-x)(a_{12}, a_{22})^T = xa_{12} + (1-x)a_{22} = (a_{12} - a_{22})x + a_{22},\\
v &= E(1,Y) = (a_{11}, a_{12})(y, 1-y)^T = a_{11}y + a_{12}(1-y) = (a_{11} - a_{12})y + a_{12},\\
v &= E(2,Y) = (a_{21}, a_{22})(y, 1-y)^T = a_{21}y + a_{22}(1-y) = (a_{21} - a_{22})y + a_{22}.
\end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene que

$$\begin{aligned}
(a_{11} - a_{21})x + a_{21} = (a_{12} - a_{22})x + a_{22} &\Rightarrow (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22})x = a_{22} - a_{21}\\
&\Rightarrow x = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};
\end{aligned}$$

de la misma forma, de las otras dos ecuaciones obtenemos

$$y = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

y ahora, de cualquiera de las cuatro ecuaciones, puede obtenerse que

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}},$$

como queríamos probar.

■

En el teorema 2.6 no hay que preocuparse por los resultados que puedan dar x^* e y^*: seguro que satisfacen las condiciones debidas (por ejemplo, que sean positivos, que no sean mayores que 1, etc.) porque el corolario 2.2.1 asegura que existen los puntos de silla y el teorema 2.5 que deben satisfacer las ecuaciones que hemos aplicado.

A continuación, se presenta un ejemplo de aplicación del teorema 2.6.

Ejemplo 2.5. *Se considera el juego de matriz* $A = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$*. Obtengamos sus valores maximín y minimax para estrategias puras:*

$$\begin{array}{cc|l}
18 & 31 & \to \text{mín} = 18\\
23 & 19 & \to \text{mín} = 19\\
\hline
\downarrow & \downarrow & \\
\text{máx} = 23 & \text{máx} = 31 &
\end{array}$$

Luego $\overline{v} = \text{mín}\{23, 31\} = 23$ *y* $\underline{v} = \text{máx}\{18, 19\} = 19$*. Como* $\underline{v} < \overline{v}$*, si calculamos*

$$x^* = \frac{19 - 23}{18 - 31 - 23 + 19} = \frac{4}{17}, \quad y^* = \frac{19 - 31}{-17} = \frac{12}{17} \quad y \quad v = \frac{18 \cdot 19 - 31 \cdot 23}{-17} = \frac{371}{17} \simeq 21{,}8,$$

hemos obtenido el valor del juego v *así como las estrategias óptimas* $X^* = (x^*, 1-x^*) = \left(\frac{4}{17}, \frac{13}{17}\right)$ *e* $Y^* = (y^*, 1-y^*) = \left(\frac{12}{17}, \frac{5}{17}\right)$.

Representación gráfica de juegos $2\times m$ y $n\times 2$

Uno de los métodos más sencillos para la resolución de juegos utiliza una representación gráfica, pero solo se puede usar cuando uno de los jugadores tiene únicamente dos estrategias puras, es decir, cuando la matriz del juego es de tamaño $2\times m$ o $n\times 2$.

Como en el caso de las matrices 2×2, lo primero que hay que hacer es calcular los valores maximín y minimax para estrategias puras, $\underline{v}$ y $\overline{v}$. Si ocurriese que $\underline{v}=\overline{v}$, este sería el valor del juego, y las estrategias óptimas de juego podrían ser las estrategias puras correspondientes (lema 2.5). Por tanto, en lo que sigue supondremos que $\underline{v}<\overline{v}$.

Consideramos el caso $2\times m$, en el que la matriz del juego es de la forma

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\end{bmatrix}.$$

Si $X=(x,1-x)$, con $x\in[0,1]$, es una estrategia del jugador 1, entonces se tiene que $E(X,j)=XA_j=xa_{1j}+(1-x)a_{2j}$ para todo $j=1,2,\dots,m$. Luego la función $x\to y=E(X,j)$ ($x\in[0,1]$) es el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(0,a_{2j})$ y $(1,a_{1j})$. Se define la ***envolvente inferior*** de todos estos segmentos ($j=1,2,\dots,m$) como la siguiente función continua:

$$f(x)=\min_{1\le j\le m}E(X,j)=\min_{1\le j\le m}\Big(xa_{1j}+(1-x)a_{2j}\Big).$$

Sea $x^*\in[0,1]$ el punto donde se alcanza el máximo de f:

$$f(x^*)=\max_{0\le x\le 1}f(x)=\max_{0\le x\le 1}\min_{1\le j\le m}\Big(xa_{1j}+(1-x)a_{2j}\Big)=\max_{0\le x\le 1}\min_{1\le j\le m}E(X,j).$$

Aplicando la ecuación (2.6) del lema 2.5, obtenemos que $f(x^*)=v$, donde v es el valor del juego. Luego $v=\min_{1\le j\le m}E(X^*,j)$, siendo $X^*=(x^*,1-x^*)$, lo que por el teorema 2.4 lleva a que X^* es una estrategia óptima para el jugador 1.

Probemos que $0<x^*<1$. Introducimos una notación: si $s\in\mathbb{N}$, al conjunto de los s primeros números naturales lo denotaremos $N_s=\{1,2,\dots,s\}$. Si $x^*=0$, entonces $f(x^*)=f(0)=\min_{j\in N_m}a_{2j}=a_{2k}$, con $k\in N_m$. Este mínimo puede alcanzarse en uno o en varios valores. Sea $\mathrm{I}=\{k\in N_m\mid f(0)=a_{2k}\}$, que es un conjunto con al menos un elemento. Nos vamos a la otra fila de la matriz, y tomamos un subíndice $k_0\in\mathrm{I}$ tal que $a_{1k_0}=\min_{k\in\mathrm{I}}a_{1k}$. En resumen, $k_0\in\mathrm{I}$ cumple que $a_{2k_0}\le a_{2j}$ para todo $j\in N_m$ y $a_{1k_0}\le a_{1k}$ para todo $k\in\mathrm{I}$. Nuestro objetivo ahora es probar que $a_{1k_0}\le a_{2k_0}$. Supongamos lo contrario, que $a_{1k_0}>a_{2k_0}$. Obtengamos $f(\varepsilon)$ con $0<\varepsilon<1$ para ε suficientemente pequeño. Por definición, $f(\varepsilon)=\min_{j\in N_m}\big(a_{2j}+\varepsilon(a_{1j}-a_{2j})\big)$. Si $j\in\mathrm{I}$, entonces las hipótesis anteriores implican que $a_{2j}+\varepsilon(a_{1j}-a_{2j})=a_{2k_0}+\varepsilon(a_{1j}-a_{2k_0})\ge a_{2k_0}+\varepsilon(a_{1k_0}-a_{2k_0})>a_{2k_0}=f(0)$. Y si $j\in N_m\setminus\mathrm{I}$, entonces $a_{2j}>a_{2k_0}=f(0)$. Por tanto, si ε es suficientemente pequeño se tiene que $a_{2j}+\varepsilon(a_{1j}-a_{2j})>a_{2k_0}=f(0)$. Como consecuencia, $f(\varepsilon)>f(0)$, contra la hipótesis de que 0 es el punto donde f alcanza el máximo. Luego se puede concluir que $a_{1k_0}\le a_{2k_0}$. Por esta desigualdad y por las desigualdades $a_{2k_0}\le a_{2j}$ para todo $j\in N_m$ resulta que $(2,k_0)$ es un punto de silla para estrategias puras y, por tanto, $\underline{v}=\overline{v}=a_{2k_0}$. Hemos llegado a una contradicción: luego $x^*\neq 0$. Un razonamiento similar lleva a que $x^*\neq 1$.

A continuación, aplicando el teorema 2.5, tenemos que $v=E(k,Y^*)$ para todo $k=1,2$ y para cualquier estrategia óptima Y^*, de donde podrá determinarse esta.

Consideramos ahora el caso $n \times 2$, en el que la matriz del juego es de la forma

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{bmatrix}.$$

Sea $Y = (y, 1-y)$, con $y \in [0,1]$, una estrategia del jugador 2. Entonces $E(i,Y) = {}_iBY^T = b_{i1}y + b_{i2}(1-y)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Luego la función $y \to z = E(i,Y)$ ($y \in [0,1]$), representada en el plano yz, es el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(0, b_{i2})$ y $(1, b_{i1})$; y se define la ***envolvente superior*** de todos estos segmentos ($i = 1, 2, \ldots, n$) como la siguiente función continua:

$$g(y) = \max_{1 \le i \le n} E(i,Y) = \max_{1 \le i \le n} (b_{i1}y + b_{i2}(1-y)).$$

Sea $y^* \in [0,1]$ el punto donde se alcanza el mínimo de g:

$$g(y^*) = \min_{0 \le y \le 1} g(y) = \min_{0 \le y \le 1} \max_{1 \le i \le n} (yb_{i1} + (1-y)b_{i2}) = \min_{0 \le y \le 1} \max_{1 \le i \le n} E(i,Y).$$

Aplicando la ecuación (2.6) del lema 2.5, obtenemos que $g(y^*) = v$, donde v es el valor del juego. Luego $v = \max_{1 \le i \le n} E(i, Y^*)$, siendo $Y^* = (y^*, 1-y^*)$, lo que por el teorema 2.4 lleva a que Y^* es una estrategia óptima para el jugador 2.

De modo similar al caso de la matriz $2 \times m$, puede probarse que $0 < y^* < 1$. Entonces, aplicando el teorema 2.5 tenemos que $v = E(X^*, k)$ para todo $k = 1, 2$ y para cualquier estrategia óptima X^*, de donde podrá determinarse esta.

A continuación aplicamos lo visto en los párrafos anteriores a un par de ejemplos.

Ejemplo 2.6. *Sea la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como $\underline{v} = -1 \neq \overline{v} = 3$*, podemos hacer la representación gráfica de los segmentos* $x \to y = E(X,j)$ $(x \in [0,1])$ *para cada* $j = 1, 2, 3$*. Su expresión es*

$$E(X,1) = 3 - 2x, \quad E(X,2) = 5 - 6x \quad y \quad E(X,3) = -3 + 6x.$$

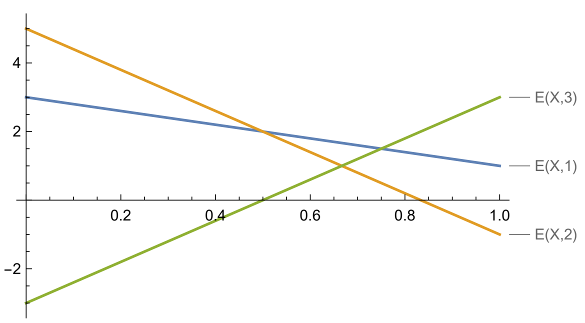

Figura 2.1: Estrategia mixta del jugador 1 contra tres filas del jugador 2

Observamos que la estrategia 1 *del jugador* 2 *tiene mayor pago esperado contra cualquier estrategia* X *del jugador* 1 *que el mínimo de los pagos esperados de las estrategias* 2 *y* 3*, por* *lo que se podría eliminar. Por otro lado, el valor del juego es el valor máximo de la envolvente inferior, que se encuentra en la intersección de las rectas de pagos asociadas a las columnas 2 y 3. Así, de* $E(X,2) = E(X,3)$ *obtenemos que* $x^* = \frac{2}{3}$*, es decir, la estrategia óptima para el jugador 1 es* $X^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$*, y el valor del juego es* $v = E(X^*,2) = E(X^*,3) = 1$.

Por otra parte, aplicando el teorema 2.5 y la definición de estrategia mixta, cualquier estrategia óptima $Y^* = (y_1, y_2, y_3)$ *del jugador 2 debe satisfacer las tres siguientes ecuaciones:*

$$E(1,Y^*) = y_1 - y_2 + 3y_3 = 1, \quad E(2,Y^*) = 3y_1 + 5y_2 - 3y_3 = 1 \quad y \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1.$$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones, se llega a que $Y^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$*. Es lógico que haya salido* $y_1 = 0$*, puesto que el segmento correspondiente a la primera estrategia del jugador 2 se había eliminado.*

A continuación hacemos un ejemplo con otra matriz.

Ejemplo 2.7. *Sea la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como $\underline{v} = -3 \neq \overline{v} = 1$*, podemos hacer la representación gráfica de los segmentos* $y \to z = E(i,Y)$ *(*$y \in [0,1]$*) para cada* $i = 1,2,3$*. Su expresión es*

$$E(1,Y) = -5 + 7y, \quad E(2,Y) = 1 - 4y, \quad y \quad E(3,Y) = -3 + 7y.$$

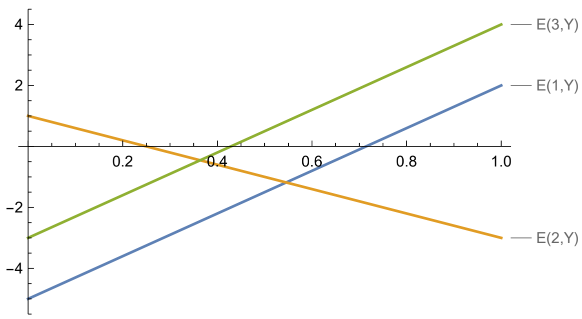

Figura 2.2: Estrategia mixta del jugador 2 contra tres filas del jugador 1

Podemos ver que la estrategia 1 del jugador 1 está por debajo del máximo de las otras estrategias 2 y 3, por lo que se podría eliminar. Por otro lado, el valor del juego es el valor mínimo de la envolvente inferior, que se encuentra en la intersección de las rectas de pagos asociadas a las columnas 2 y 3. Así, de $E(2,Y) = E(3,Y)$ *obtenemos que* $y^* = \frac{4}{11}$*, es decir, la estrategia óptima para el jugador 2 es* $Y^* = \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right)$*, y el valor del juego es* $v = E(2,Y^*) = E(3,Y^*) = -\frac{5}{11}$.

Por otra parte, aplicando el teorema 2.5 y la definición de estrategia mixta, cualquier estrategia óptima $X^* = (x_1, x_2, x_3)$ *del jugador 1 debe satisfacer las tres siguientes ecuaciones:*

$$E(X^*,1) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -\frac{5}{11}, \quad E(X^*,2) = -5x_1 + x_2 - 3x_3 = -\frac{5}{11} \quad y \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones, se llega a que $X^* = \left(0, \frac{7}{11}, \frac{4}{11}\right)$*. Es lógico que haya salido* $x_1 = 0$*, puesto que el segmento correspondiente a la primera estrategia del jugador 1 se había eliminado.*

Estrategias dominadas

A la hora de resolver juegos es más fácil resolver una matriz pequeña que una grande. Por tanto, lo primero que pensaríamos al ver una matriz grande es si la podemos reducir; es decir, si se pueden eliminar algunas filas y/o columnas que nunca se usarán por existir otra fila/columna mejor. Este proceso se denomina ***eliminación de una fila y/o columna por dominancia***.

Definición 2.9. *Decimos que* ***una estrategia*** i ***domina a otra*** k *del jugador* 1 *si el pago que recibe con la primera estrategia es siempre mayor que con la estrategia* k*, es decir, si* $a_{ij} > a_{kj}$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots, m$*. Del mismo modo, una estrategia* j *domina a otra* k *del jugador* 2 *si el pago que da es siempre menor que con la estrategia* k*, es decir, si* $a_{ij} < a_{ik}$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Si el jugador 1 observa que los pagos de la fila i son mayores que los de la fila k, entonces nunca jugaría con esta, puesto que el jugador 1 quiere el mayor pago posible. Por eso se podría eliminar la fila k. Esto mismo ocurre para el jugador 2: si los pagos de la columna j son menores que los de la columna k, entonces el jugador 2 nunca jugará con esta, ya que quiere conseguir la menor pérdida posible.

Si en el proceso de eliminación llegáramos a una matriz $2 \times m$ o $n \times 2$, entonces podríamos resolver el juego gráficamente.

El siguiente ejemplo ilustra el concepto de dominancia.

Ejemplo 2.8. *Es inmediato comprobar que en las matrices de los ejemplos 2.1, 2.5 y 2.6 no hay ninguna fila o columna que domine a otra. Pero en la del ejemplo 2.3 la columna* 2 *domina a la columna* 3*; y en la del ejemplo 2.7 la fila* 3 *domina a la fila* 1*. En estos dos últimos casos podríamos haber eliminado la columna* 3 *y la fila* 1*, respectivamente, quedando las matrices originales reducidas a las siguientes:*

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 2.7 vimos que el segmento $E(1, Y)$ estaba por debajo del segmento $E(3, Y)$, lo que en realidad significaba que la fila 1 estaba dominada por la fila 3, como acabamos de ver. Si hubiéramos eliminado esa fila desde el inicio, habríamos resuelto antes el ejemplo 2.7.

La siguiente definición introduce otra forma de eliminar filas o columnas de una matriz por dominancia.

Definición 2.10. *Diremos que una estrategia* i *del jugador* 1 *está* ***dominada por una combinación lineal convexa*** *de las estrategias* p *y* q *del mismo jugador si existe* $\alpha \in (0,1)$ *tal que* $a_{ij} < \alpha a_{pj} + (1-\alpha) a_{qj}$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots, m$*. Y una estrategia* j *del jugador* 2 *está dominada por una combinación lineal convexa de las estrategias* p *y* q *del mismo jugador si existe* $\alpha \in (0,1)$ *tal que* $a_{ij} > \alpha a_{ip} + (1-\alpha) a_{iq}$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Cuando una estrategia está dominada por una combinación lineal convexa de otras, podría eliminarse cara a la obtención de estrategias óptimas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.9. *Volvamos al ejemplo 2.6. En el ejemplo 2.8 comentamos que ninguna fila o columna de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

está dominada por otras, individualmente. Sin embargo, en el ejemplo 2.6 vimos que el segmento $E(X,1)$ estaba por encima del mínimo de los segmentos $E(X,2)$ y $E(X,3)$. Esto nos lleva a intuir que la columna 1 podría estar dominada por una combinación lineal convexa de las columnas 2 y 3. Para que esto ocurra, debería existir $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} > \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4\alpha \\ -3+8\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}.$$

Luego, en efecto, la columna 1 está dominada por una combinación lineal convexa de las columnas 2 y 3: se puede eliminar la columna 1, quedando la matriz

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix},$$

cuyas estrategias mixtas óptimas podrían encontrarse ahora con más brevedad que en el ejemplo 2.6.

Juegos $n \times n$ inversibles

Supongamos que el juego tiene una matriz de pagos $n \times n$ y que para el jugador 1 existe lo que llamaremos una ***estrategia óptima completamente mixta***, es decir, una estrategia óptima $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $x_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, el teorema 2.5 asegura que cada estrategia óptima Y del jugador 2 satisface las siguientes ecuaciones:

$$E(i,Y) = {}_iAY^T = v \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si denotamos $J_n = (1, 1, \ldots, 1)$, entonces las ecuaciones anteriores equivalen a la siguiente:

$$AY^T = vJ_n^T = (v, v, \ldots, v)^T.$$

Si el valor del juego fuera $v = 0$, entonces $AY^T = 0J_n^T = 0$ y, como A es inversible, $A^{-1}AY^T = Y^T = A^{-1}0 = 0$, lo que es falso (no existe la estrategia nula). Luego concluimos que $v \neq 0$. Volvemos a despejar la estrategia Y como antes:

$$A^{-1}AY^T = Y^T = vA^{-1}J_n^T \tag{2.9}$$

Si conociéramos el valor del juego v, entonces tendríamos Y, por lo que vamos a calcular ese valor. Como $1 = \sum_{j=1}^n y_j = J_n Y^T$, multiplicando a la izquierda de la ecuación (2.9) por J_n, obtenemos

$$J_n Y^T = 1 = vJ_n A^{-1} J_n^T \Rightarrow J_n A^{-1} J_n^T \neq 0 \text{ y } v = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T},$$

de donde

$$Y^T = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} A^{-1} J_n^T \Leftrightarrow Y = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n (A^{-1})^T.$$

Por tanto, se ha encontrado una estrategia mixta óptima para el jugador 2 asumiendo que existe una estrategia óptima completamente mixta para el jugador 1.

Recíprocamente, supongamos ahora que es el jugador 2 el que tiene una estrategia óptima Y completamente mixta: $y_j > 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces podremos encontrar una estrategia óptima X para el jugador 1 con un procedimiento semejante, por el que se llegaría a que

$$X = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n A^{-1}.$$

El siguiente resultado generaliza lo que acabamos de mostrar, de manera que no haga falta suponer la existencia de estrategias óptimas completamente mixtas.

Teorema 2.7. *Se considera un juego cuya matriz A es inversible de orden n y su valor v es no nulo. Sea $J_n = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, y supongamos que $J_n A^{-1} J_n^T \neq 0$. Sean $v(A) \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in \mathbb{R}^n$ dados por*

$$v(A) = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T}, \quad X = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n A^{-1} \quad e \quad Y = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n (A^{-1})^T. \tag{2.10}$$

Si las componentes de X e Y son no negativas, entonces $v = v(A)$ es el valor del juego y (X, Y) es un punto de silla.

Demostración:

Sean X e Y los vectores definidos en (2.10). Observe que

$$J_n X^T = J_n \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} (A^{-1})^T J_n^T = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n (A^{-1})^T J_n^T. \tag{2.11}$$

Por otra parte, como $J_n A^{-1} J_n^T$ es un número, $J_n A^{-1} J_n^T = (J_n A^{-1} J_n^T)^T = J_n (A^{-1})^T J_n^T$. Luego de la ecuación (2.11) queda que $J_n X^T = 1$. Como, por hipótesis, las componentes de X son no negativas, concluimos que $X \in S_n$. Razonando de manera similar, se obtiene que $Y \in S'_n$.

Sea $Y^0 \in S'_n$ cualquiera. Entonces,

$$E(X, Y^0) = XA(Y^0)^T = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n A^{-1} A (Y^0)^T = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n (Y^0)^T = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} = v(A),$$

ya que $J_n (Y^0)^T = 1$. Del mismo modo se prueba que, para cualquier $X^0 \in S_n$, si Y es el vector definido en (2.10), entonces $E(X^0, Y) = v(A)$. Luego, en conclusión,

$$E(X^0, Y) = E(X, Y) = E(X, Y^0) = v(A) \quad \text{para cualesquiera } X^0 \in S_n \text{ e } Y^0 \in S'_n.$$

Así, (X, Y) es un punto de silla (en el que la ecuación (2.3) se satisface con igualdades) y $v(A)$ (aplicando el corolario 2.2.2) es el valor del juego.

■

Hay juegos $n \times n$ cuyo valor es cero y, por tanto, no podríamos aplicar el teorema 2.7 para su resolución. Pero si sumamos a todos los elementos de la matriz del juego una constante, entonces este problema se resuelve, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Sea A la matriz de un juego de valor v_A y sea $k \in \mathbb{R}$. Si A es de tamaño $n \times m$, sea $U_{n \times m}$ la matriz de tamaño $n \times m$ tal que $u_{ij} = 1$ para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. Si $B = A + kU_n$ y consideramos el juego cuya matriz es B, sea v_B el valor de este juego. Entonces $v_B = v_A + k$, y las estrategias óptimas de ambos juegos coinciden.*

Demostración:

Al ser A y B matrices $n \times m$, los conjuntos de estrategias para ambos juegos son S_n y S'_m. Veamos la relación entre el pago esperado que se consigue con ellas en ambos juegos. Representaremos E_A a los pagos esperados según el juego de matriz A y E_B a los pagos esperados según el juego de matriz B. Entonces, para cada $(X, Y) \in S_n \times S'_m$ se tiene que

$$\begin{aligned} E_B(X,Y) &= XBY^T = X(A+kU_n)Y^T = XAY^T + kXU_nY^T = E_A(X,Y) + k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \\ &= E_A(X,Y) + k. \end{aligned}$$

Como consecuencia, las estrategias óptimas son las mismas para ambas matrices y los valores de los juegos cumplen que $v_B = v_A + k$.

■

El siguiente ejemplo aplica los dos últimos resultados.

Ejemplo 2.10. *Como la matriz del juego presentado en el ejemplo 2.1 es una matriz cuadrada y el valor del juego es $v = 0$, como se probó en el ejemplo 2.4, vamos a intentar resolverla aplicando los teoremas 2.7 y 2.8. En primer lugar, en vez de trabajar con la matriz A del juego lo haremos con la matriz*

$$B = A + 2U_5 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si no supiéramos que $v_A = 0$ sería una medida prudente sumar o restar una cantidad fija a todos los elementos de A ya que, al situarse estos en torno a cero, podría suceder que su valor v fuera nulo.

Puede comprobarse que $\det B = 512 \neq 0$. Luego B es inversible, y se obtiene que

$$B^{-1} = \frac{1}{512}\begin{bmatrix} 1 & -155 & 68 & -59 & 161 \\ 165 & 25 & -44 & -7 & -59 \\ -60 & 84 & 16 & -44 & 68 \\ 69 & 57 & 84 & 25 & -155 \\ -159 & 6 & -60 & 165 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde $J_5 B^{-1} J_5^T = \frac{1}{2} \neq 0$. Luego la ecuación (2.10) proporciona que $v(B) = 2$,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{J_5 B^{-1} J_5^T} J_5 B^{-1} = 2J_5 B^{-1} = \left(\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right) \qquad e \\ Y &= \frac{1}{J_5 B^{-1} J_5^T} J_5 (B^{-1})^T = 2J_5 (B^{-1})^T = \left(\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right); \end{aligned}$$

y como todas las componentes de X e Y son no negativas, el teorema 2.7 concluye que $v_B = v(B) = 2$ y (X, Y) es un punto de silla para el juego de matriz B. Finalmente, el teorema 2.8 asegura que el valor del juego de matriz A es $v_A = v_B - 2 = 0$, y que un punto de silla de este juego es también (X, Y).

Observe que estos resultados coinciden, como no podía ser de otra manera, con los que obtuvimos en el ejemplo 2.4.

Programa lineal

Un método eficaz para encontrar estrategias mixtas óptimas para un juego con matriz de cualquier tamaño es hacer uso de la programación lineal, que se usa para encontrar los máximos o los mínimos de una función lineal de varias variables, la llamada función objetivo, con unas ciertas restricciones en sus variables. George Danting, en el año 1947, desarrolló el ***método del simplex*** para resolver problemas de este tipo, y es el que aplicaremos para resolver los juegos de suma cero.

Para aplicar la programación lineal a los juegos de suma cero hay que tener en cuenta que el jugador 1 busca maximizar el valor del juego v. Por los teoremas 2.3 y 2.4, sabemos que v y las estrategias óptimas X^* para el jugador 1 vienen caracterizadas porque v es el máximo valor que satisface las desigualdades $v \leq E(X^*, j) = X^* A_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), siendo A la matriz del juego. Luego se puede plantear el siguiente programa lineal para el jugador 1:

$$\text{Maximizar w} \quad \text{sujeto a las restricciones } XA \geq wJ_m,\ X \geq 0 \text{ y } XJ_n^T = 1.$$

La solución del programa lineal nos daría v como máximo de los w, y los valores X donde se alcanza proporcionan las estrategias óptimas del jugador 1.

Del mismo modo, el jugador 2 busca minimizar el valor del juego v, de modo que, por los teoremas mencionados, $E(i, Y^*) = {}_iA(Y^*)^T \leq v$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), siendo Y^* cualquier estrategia óptima del jugador 2. Luego se puede plantear el siguiente programa lineal para el jugador 2:

$$\text{Minimizar z} \quad \text{sujeto a las restricciones } AY^T \leq zJ_n^T,\ Y \geq 0 \text{ y } J_m Y^T = 1.$$

La solución de este programa lineal, dual del anterior, nos daría v como mínimo de los z, y los valores Y donde se alcanza proporcionan las estrategias óptimas del jugador 2.

Para obtener dichas soluciones, usaremos los comandos que nos ofrece *Mathematica*, como se muestra en el anexo. En ese anexo retomamos lo que dejamos abierto en la primera parte del ejemplo 2.4 para resolver los dos programas lineales anteriores aplicados a este caso.

3

Juegos bipersonales de suma no nula

En este capítulo trataremos de los juegos bipersonales de suma no nula, que son juegos que pueden ser tanto cooperativos como no cooperativos, e introduciremos diversos resultados sobre ellos. Entre estos, el teorema de Nash, que es el más importante de la teoría de juegos. Estudiaremos qué estrategias son mejores para cada jugador (en cierto sentido), y se proporcionarán métodos que las encuentren. Finalmente, daremos criterios para hacer una elección entre varias estrategias favorables.

En el capítulo anterior hemos trabajado con juegos donde las ganancias del jugador 1 eran las pérdidas del jugador 2 y viceversa. En este trataremos de juegos bipersonales en los que la suma de las ganancias de cada jugador no es cero, ni siquiera constante. De este modo, cada jugador tendrá su propia matriz de pagos y el objetivo de maximizar estos, teniendo en cuenta que el otro jugador buscará lo mismo. Estos juegos son más aplicables en economía o política que los de suma cero, donde lo menos frecuente es que se den situaciones en las que los jugadores tengan ganancias idénticas pero de signo opuesto; y muchas veces ambos tendrán ganancias (aunque también hay casos en los que los dos tiene pérdidas).

Si el jugador 1 tiene n posibles estrategias y el jugador 2 tiene m, cuando el primero elige la estrategia $i = 1, 2, \dots, n$ y el segundo la estrategia $j = 1, 2, \dots, m$, entonces el primero recibirá un pago a_{ij} y el segundo un pago b_{ij}. Esto genera la matriz de pagos A del jugador 1 y la matriz de pagos B del jugador 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

que muchas veces se representarán como una ***bimatriz*** o ***matriz de pagos conjunta*** de ambos jugadores, como sigue:

$$(A, B) = \begin{bmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & \dots & a_{1m}, b_{1m} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} & \dots & a_{2m}, b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}, b_{n1} & a_{n2}, b_{n2} & \dots & a_{nm}, b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Los juegos de suma cero se obtienen como caso particular, tomando $B = -A$.

A diferencia de los juegos de suma cero, que son no cooperativos, los juegos de suma no nula podrían serlo, como es el caso del juego conocido como ***dilema del prisionero***, cuya bimatriz de pagos puede ser

Pris. 1 \ *Pris. 2*	*Confiesa*	*No confiesa*
Confiesa	$-5, -5$	$0, -20$
No confiesa	$-20, 0$	$-1, -1.$

En esta matriz, los pagos indican los años de cárcel con que se condenaría a cada prisionero (con signo negativo porque son "pérdidas"). Si, antes de separar a los prisioneros, estos se hubieran puesto de acuerdo en no confesar, entonces sus estrategias serían la fila 2, para el prisionero 1, y la columna 2, para el prisionero 2; y serían condenados a un año de cárcel. Globalmente, este sería el mejor resultado: los prisioneros estarían cooperando para pasar poco tiempo en la cárcel, dos años en total. Pero si uno de los dos incumple el acuerdo y confiesa, quedaría libre a costa de condenar al otro a veinte años de cárcel. Nos preguntamos si se podrá encontrar un equilibrio en este juego, como ocurría cuando en los juegos de suma cero encontrábamos un punto de silla. ¿Podrá resolverse de alguna manera un juego tan endiablado como este? En las siguientes secciones lo veremos.

3.1 Estrategias puras

En esta sección introduciremos los conceptos básicos de los juegos de suma no nula e iniciaremos su resolución utilizando solo estrategias puras.

Extendiendo la definición dada para juegos de suma cero, diremos que una ***estrategia pura*** es, para el jugador 1, la elección fija de una fila de la bimatriz de pagos; y para el jugador 2, la elección fija de una de sus columnas.

El siguiente ejemplo ilustra la problemática de usar sólo estrategias puras.

Ejemplo 3.1. *Se considera un juego con matriz de pagos conjunta*

$J1 \backslash J2$	α	β	γ
a	$1,0$	$1,3$	$3,0$
b	$0,2$	$0,1$	$3,0$
c	$0,2$	$2,4$	$5,3$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si el jugador 1 *razona como en los juegos de suma cero, buscando una estrategia que maximice el mínimo pago que puede obtener con ella, escogería la estrategia* a*, que le asegura un pago mínimo de* 1 *(*b *y* c *aseguran un pago mínimo de* 0*). Es decir, obtendría un pago mínimo de* $\max_{1\le i\le 3} \min_{1\le j\le 3} a_{ij} = 1$. *Si el jugador* 2 *razona igual, elegirá la estrategia* β*, puesto que el pago mínimo que obtiene con ella es* 1*, mientras que con las otras es solo* 0*. Así obtendría un pago mínimo de* $\max_{1\le j\le 3} \min_{1\le i\le 3} b_{ij} = 1$. *Si, efectivamente, los jugadores* 1 *y* 2 *eligen las estrategias* a *y* β*, entonces obtendrán un pago de* 1 *y* 3*, respectivamente.*

Pero si cada jugador eligiera la estrategia donde tiene su mejor pago, el jugador 1 *optaría por* c*, puesto que* $a_{33} = 5$*; y el jugador* 2 *seleccionaría* β*, pues* $b_{32} = 4$. *Entonces los jugadores obtendrían los pagos* $(a_{32}, b_{32}) = (2,4)$*, que son mejores que con la táctica anterior. Además, en este caso se tiene que* a_{32} *es el mayor valor de su columna en* A *y* b_{32} *es el mayor valor de su fila en* B*. Por tanto, si desde la selección* (c,β) *uno de los dos jugadores (y solo uno) cambiara de estrategia, resultaría perjudicado.*

En ninguno de los dos casos se ha obtenido el mejor pago global, que es $(a_{33}, b_{33}) = (5,3)$ *(*$5+3=8$*). Si los jugadores pudieran ponerse de acuerdo para elegir estrategias, ¿lo lograrían? Más adelante iremos comentando estos problemas.*

En el dilema del prisionero, los dos modos de razonar del ejemplo 3.1 llevan al pago $(a_{11}, b_{11}) = (-5,-5)$, bastante peor para ambos que la elección $(a_{22}, b_{22}) = (-1,-1)$. Pero lo cierto es que a_{11} es el mayor valor de su columna en A y b_{11} es el mayor valor de su fila en B. En definitiva, ambos ejemplos ilustran la dificultad que puede tener encontrar un resultado óptimo en un juego si solo se usan estrategias puras. Introducimos primero una definición relacionada con lo visto en esos ejemplos.

Definición 3.1. *Dado un juego con bimatriz* (A,B) *de tamaño* $n \times m$*, diremos que* (i^*, j^*) *es un* ***equilibrio de Nash*** *para estrategias puras si* $a_{i^*j^*}$ *es el mayor pago en la columna* j^* *de* A *y* $b_{i^*j^*}$ *es el mayor pago en la fila* i^* *de* B*, es decir, si* $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$ *y* $b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots, m$*.*

Cuando $B = -A$, $b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}$ equivale a que $a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*}$. Luego se tendría que $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. Es decir, para juegos de suma cero y estrategias puras, un equilibrio de Nash es un punto de silla: el concepto de equilibrio de Nash extiende el de punto de silla a juegos de suma no nula.

Como se ha visto en los ejemplos, si los jugadores están en un equilibrio de Nash y uno de ellos (solo uno) cambiase de estrategia, entonces este no obtendrá un pago mayor que el dado por el equilibrio de Nash.

Una manera cómoda de encontrar los equilibrios de Nash para estrategias puras consiste en marcar en la matriz A los máximos de cada columna y en la matriz B los máximos de cada fila. Las posiciones (i,j) donde coincidan esos máximos son los equilibrios de Nash para estrategias puras. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 3.2. *Consideramos las matrices del ejemplo 3.1, y marquemos los máximos de cada columna de* A *y de cada fila de* B*:*

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & \bar{2} & \bar{5} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \bar{3} & 0 \\ \bar{2} & 1 & 0 \\ 2 & \bar{4} & 3 \end{bmatrix}, \quad (A,B) = \begin{bmatrix} \bar{1},0 & 1,\bar{3} & 3,0 \\ 0,\bar{2} & 0,1 & 3,0 \\ 0,2 & \bar{2},\bar{4} & \bar{5},3 \end{bmatrix}.$$

Luego $(3,2)$ *es el único equilibrio de Nash para estrategias puras de este juego.*

Puede haber juegos que tengan más de un equilibrio de Nash, como aquel cuya bimatriz (C,D) *es la dada a continuación; y juegos que no tengan ningún equilibrio de Nash, como ocurre si su bimatriz es* (E,R)*:*

$$(C,D) = \begin{bmatrix} 2,2 & \bar{2},\bar{5} \\ \bar{3},\bar{4} & 1,3 \end{bmatrix}, \quad (E,R) = \begin{bmatrix} 2,\bar{5} & \bar{2},2 \\ \bar{3},3 & 1,\bar{4} \end{bmatrix}.$$

Si, en el juego de bimatriz (E,R), el jugador 1 sabe que el jugador 2 va a jugar con la columna 1, entonces el jugador 1 puede conseguir su mayor pago eligiendo la fila 2. Esto es lo que se llama —al igual que en juegos de suma cero— ***estrategia de mejor respuesta*** a una estrategia dada. En el caso de los equilibrios de Nash (i,j) sucede que i es la estrategia de mejor respuesta para j y viceversa. Otro concepto que se generaliza es el de ***dominancia***. Cuando una fila o columna están dominadas por otras se pueden excluir de la bimatriz del juego, puesto que los jugadores nunca apostarán por ellas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.3. *En el juego del ejemplo 3.1, puede observarse que la tercera columna de la matriz* B *es menor elemento a elemento que la segunda. Por tanto, el jugador 2 nunca jugará con la tercera columna. Luego se puede eliminar por dominancia dicha columna de la bimatriz* (A,B)*, quedando la siguiente matriz conjunta:*

$$(A_1, B_1) = \begin{bmatrix} 1,0 & 1,3 \\ 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 2,4 \end{bmatrix}.$$

Ahora, la fila 1 domina a la fila 2: el jugador 1 elimina esta estrategia y queda

$$(A_1, B_1) = \begin{bmatrix} 1,0 & 1,3 \\ 0,2 & 2,4 \end{bmatrix},$$

donde observamos que la columna 1 se puede eliminar al estar dominada por la columna 2. Y entonces se llega a una situación en la que se puede eliminar por dominancia la primera fila:

$$(A_2, B_2) = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 2,4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad (A_3, B_3) = \begin{bmatrix} 2,4 \end{bmatrix}.$$

Por dominancia se ha llegado hasta el equilibrio de Nash (lo que sucede pocas veces).

3.2 Estrategias mixtas

En esta sección introduciremos las estrategias mixtas para juegos de suma no nula, y veremos que dichas estrategias nos permiten encontrar equilibrios de Nash, también cuando no los había para estrategia puras. La respuesta la obtendremos como consecuencia del teorema de Nash. Además, estudiaremos como garantizar un pago mínimo para los jugadores.

Conceptos fundamentales

En primer lugar, adaptamos la definición de estrategia mixta al caso de juegos de suma no nula.

Definición 3.2. *Dado un juego con bimatriz (A, B) de tamaño $n \times m$, una estrategia mixta para el jugador 1 es un vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n$, donde x_i representa la probabilidad de que dicho jugador use la fila i como estrategia. Del mismo modo, una estrategia mixta para el jugador 2 es un vector $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in S'_m$, donde y_j representa la probabilidad de que la columna j sea la estrategia usada por el jugador 2.*

El concepto de pago esperado también es similar al dado para juegos de suma cero.

Definición 3.3. *Se considera un juego con bimatriz (A, B) de tamaño $n \times m$. Si el jugador 1 elige la estrategia $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n$ y el jugador 2 elige la estrategia $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in S'_m$, entonces los* ***pagos esperados*** *$E_1(X, Y)$ y $E_2(X, Y)$ de los jugadores 1 y 2 son, respectivamente,*

$$E_1(X, Y) = XAY^T \quad y \quad E_2(X, Y) = XBY^T.$$

Si el juego es de suma cero, entonces $B = -A$ y se obtiene que $E_2(X, Y) = -E_1(X, Y)$, como ya sabíamos.

Si el jugador 1 juega con una estrategia pura i ($X = (0, \dots, 1_i, \dots, 0)$), entonces los pagos esperados respectivos se representarán por

$$E_1(i, Y) = {}_iAY^T \quad \text{y} \quad E_2(i, Y) = {}_iBY^T;$$

y si el jugador 2 juega con una estrategia pura j ($Y = (0, \dots, 1_j, \dots, 0)$), entonces los pagos esperados se representarán respectivamente por

$$E_1(X, j) = XA_j \quad \text{y} \quad E_2(X, j) = XB_j.$$

De nuevo se verifican igualdades semejantes a las de la ecuación (2.2).

A continuación, extendemos el concepto de equilibrio de Nash a estrategias mixtas.

Definición 3.4. *Dado un juego con bimatriz (A, B) de tamaño $n \times m$, un par de estrategias mixtas $(X^*, Y^*) \in S_n \times S'_m$ son un **equilibrio de Nash** si satisfacen las siguientes condiciones:*

$$E_1(X, Y^*) \leq E_1(X^*, Y^*) \text{ para todo } X \in S_n, \tag{3.1}$$
$$E_2(X^*, Y) \leq E_2(X^*, Y^*) \text{ para todo } Y \in S'_m; \tag{3.2}$$

*en cuyo caso se dice que X^* e Y^* son **estrategias mixtas óptimas** y que $E_1(X^*, Y^*)$ y $E_2(X^*, Y^*)$ son **pagos esperados óptimos** para los respectivos jugadores.*

También se define análogamente el concepto de ***estrategia de mejor respuesta***.

Los pagos óptimos pueden ser varios, tantos como equilibrios de Nash haya. Pero si un único jugador se mueve del equilibrio de Nash, no obtendrá un pago esperado mayor que con el equilibrio de Nash.

Si el juego es de suma cero, entonces es inmediato que los equilibrio de Nash son los puntos de silla.

Lo peor que le puede suceder a un jugador en un juego de suma no nula es que el otro jugador juegue como si fuese un juego de suma cero, haciendo lo posible por minimizar sus ganancias. Para el jugador 1 esto supondría que su pago óptimo sería el valor del juego de suma cero de matriz A (recuerde el corolario 2.2.2); para el jugador 2, lo mismo con respecto a la matriz B^T. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.5. *Dado un juego con bimatriz (A, B), el **valor o pago asegurado** del jugador 1 es el valor de la matriz A, $v(A)$. Y si (X_A, Y_A) es un punto de silla para las estrategias mixtas de A, entonces se dice que X_A es una **estrategia maximín** del jugador 1. Del mismo modo, se define el valor o pago asegurado del jugador 2 como el valor de la matriz B^T, $v(B^T)$. Y si (X_{B^T}, Y_{B^T}) es un punto de silla para las estrategias mixtas de B^T, entonces se dice que X_{B^T} es una estrategia maximín del jugador 2.*

En el siguiente ejemplo se utiliza esta última definición.

Ejemplo 3.4. *Consideramos otra vez el juego del ejemplo 3.1. En dicho juego*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por dominancia (de juegos de suma cero) en A se puede eliminar primero su tercera columna y luego su segunda fila; y en B^T se puede eliminar primero su tercera fila y luego su tercera columna, quedando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es claro que

$$\begin{aligned}\underline{v}(A) &= \max_{1\le i\le 2}\min_{1\le j\le 2} a_{ij} = \max\{1,0\} = 1,\\ \overline{v}(A) &= \min_{1\le j\le 2}\max_{1\le i\le 2} a_{ij} = \min\{1,2\} = 1.\end{aligned}$$

Luego $v(A) = \underline{v}(A) = \overline{v}(A) = 1$*; y el jugador 1 tiene como estrategia maximín a* $X_A = (1,0,0)$*. Esto significa que para cualquier estrategia que use el jugador 2, el jugador 1 obtendrá como mínimo el pago* $v(A) = 1$*: este es su pago asegurado.*

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\underline{v}(B^T) &= \max_{1\le i\le 2}\min_{1\le j\le 2} b_{ij}^T = \max\{0,1\} = 1,\\ \overline{v}(B^T) &= \min_{1\le j\le 2}\max_{1\le i\le 2} b_{ij}^T = \min\{3,2\} = 2.\end{aligned}$$

Luego no hay una estrategia pura óptima para el jugador 2. Obtenemos el valor $v(B^T)$ *(el pago asegurado para el jugador 2) y su estrategia maximín utilizando el teorema 2.6:*

$$v(B^T) = \frac{0\cdot 1 - 2\cdot 3}{0-2-3+1} = \frac{3}{2} \quad y \quad X_{B^T} = (x^*, 1-x^*, 0), \text{ con } x^* = \frac{1-3}{0-2-3+1} = \frac{1}{2},$$

es decir, $X_{B^T} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Hemos obtenido que los pagos mínimos asegurados son 1 y 1,5 para los jugadores 1 y 2, respectivamente. Con el equilibrio de Nash para estrategias puras ambos jugadores obtenían mejores resultados (2 y 4, respectivamente), como era de esperar. También eran mejores resultados 1 y 3, como obtuvimos mediante otro razonamiento en el ejemplo 3.1.

En el ejemplo 3.4, el pago asegurado de cada jugador no es mayor que el que obtiene en el equilibrio de Nash. Esto es un resultado general, como se muestra a continuación.

Teorema 3.1. *Dado un juego con bimatriz* (A,B) *y equilibrio de Nash* (X^*,Y^*)*, se tiene que*

$$E_1(X^*,Y^*) \ge v(A) \quad y \quad E_2(X^*,Y^*) \ge v(B^T).$$

Demostración:

Por la definición de equilibrio de Nash, si $n\times m$ es el tamaño de las matrices, entonces

$$\begin{aligned}E_1(X,Y^*) &= XAY^{*T} \le X^*AY^{*T} = E_1(X^*,Y^*) \text{ para todo } X\in S_n,\\ E_2(X^*,Y) &= X^*BY^T \le X^*BY^{*T} = E_2(X^*,Y^*) \text{ para todo } Y\in S'_m,\end{aligned}$$

de donde se obtiene ya lo deseado:

$$\begin{aligned}E_1(X^*,Y^*) &\ge \max_{X\in S_n} XAY^{*T} \ge \min_{Y\in S'_m}\max_{X\in S_n} XAY^T = v(A),\\ E_2(X^*,Y^*) &\ge \max_{Y\in S'_m} X^*BY^T = \max_{Y\in S'_m} YB^TX^{*T} \ge \min_{X\in S_n}\max_{Y\in S'_m} YB^TX^T = v(B^T).\end{aligned}$$

■

En resultados como el anterior hemos usado los equilibrios de Nash para estrategias mixtas. Es el momento de preguntarnos por su existencia. A este objetivo dedicamos la siguiente subsección.

El teorema de Nash

Hemos visto que no siempre existe un equilibrio de Nash para estrategias puras. Pero esto cambia cuando se utilizan estrategias mixtas, como prueba Nash en su famoso teorema. Para su demostración necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.2 (del punto fijo de Kakutani). *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $\mathbb{R}^n$, y sea g una función multivaluada semicontinua superiormente de C en sí mismo. Si $g(x)$ es no vacío y convexo para todo $x \in C$, entonces g tiene un punto fijo, esto es, existe $x^* \in C$ satisfaciendo que $x^* \in g(x^*)$.*

Para entender bien el enunciado de este resultado y facilitar la demostración del próximo, introducimos los siguientes conceptos.

Definición 3.6. *Una **función multivaluada** entre dos conjuntos C y D es una correspondencia entre dichos conjuntos en la que a cada elemento de C se le asocia ninguno, uno o más elementos de D. Por tanto, puede verse también como una aplicación entre C y el conjunto $\mathcal{P}(D)$ de las partes de D, es decir, el formado por todos los subconjuntos de D.*

Un simple ejemplo de función multivaluada es la correspondencia $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \pm\sqrt{x}$ (en este ejemplo, al cero le asocia un único valor; a los demás les asocia dos).

Definición 3.7. *Sea C un subconjunto cerrado del espacio euclídeo R^n. Una función multivaluada f de C en sí mismo se dice que es **semicontinua superiormente** si satisface la siguiente propiedad: para cualquier par de sucesiones convergentes $\{a_k\},\{b_k\} \subset C$ tales que $b_k \in f(a_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, si $a = lim_{k\to\infty} a_k$ y $b = lim_{k\to\infty} b_k$, entonces $b \in f(a)$.*

La última definición previa al teorema es el siguiente concepto sobre estrategias.

Definición 3.8. *Se considera un juego con bimatriz asociada (A,B). El **conjunto de mejor respuesta** del jugador 1 a una estrategia $Y \in S'_m$ del segundo jugador, $M_1(Y)$, es el formado por aquellas estrategias del jugador 1 que obtienen el mejor pago esperado posible con respecto a esa estrategia Y, es decir,*

$$M_1(Y) = \{X_0 \in S_n \mid E_1(X_0, Y) = \max_{X \in S_n} E_1(X,Y)\}. \tag{3.3}$$

Del mismo modo se define el conjunto de mejor respuesta del jugador 2 a una estrategia $X \in S_n$ del primero:

$$M_2(X) = \{Y_0 \in S'_m \mid E_2(X, Y_0) = \max_{Y \in S'_m} E_2(X,Y)\}. \tag{3.4}$$

Por definición, los conjuntos de estrategias S_n y S'_m son subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Como la función $h_Y: S_n \to \mathbb{R}$ definida por $h_Y(X) = E_1(X,Y) = XAY^T$ es continua, esa función alcanza su máximo. Luego $M_1(Y) \neq \emptyset$ para todo $Y \in S'_m$. Del mismo modo se concluye que $M_2(X) \neq \emptyset$ para todo $X \in S_n$.

El siguiente teorema garantiza la existencia de un equilibrio de Nash si jugamos con estrategias mixtas. Es un resultado que aparece por primera vez en la tesis doctoral de John Nash y puede encontrarse en Nash [5].

Teorema 3.3 (de Nash). *Todo juego definido por una bimatriz de pagos (A,B) tiene al menos un equilibrio de Nash.*

Demostración:

Definimos una función multivaluada ϖ de $S_n \times S'_m$ en sí mismo mediante

$$\varpi(X,Y) = M_1(Y) \times M_2(X) \quad \text{para todo } (X,Y) \in S_n \times S'_m.$$

A continuación, mostraremos que ϖ satisface las hipótesis del teorema 3.2 (de Kakutani).

1. Por definición, los conjuntos de estrategias S_n y S'_m son subconjuntos convexos, además de —como se ha dicho— cerrados y acotados. Por tanto, $S_n \times S'_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es también cerrado, acotado y convexo. Por otra parte, $M_1(Y) \times M_2(X) \in \mathcal{P}(S_n) \times \mathcal{P}(S'_m) \subset \mathcal{P}(S_n \times S'_m)$. Luego ϖ satisface las condiciones de dominio y codominio exigidas por el teorema 3.2.

2. Veamos ahora que ϖ es semicontinua superiormente. Lo hacemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos sucesiones convergentes de elementos de $S_n \times S'_m$, $(X_k, Y_k) \to (X', Y')$ y $(U_k, V_k) \to (U', V')$, tales que

$$(U_k, V_k) \in \varpi(X_k, Y_k) \quad \text{y} \quad (U', V') \notin \varpi(X', Y') = M_1(Y') \times M_2(X').$$

Esto último quiere decir que se da al menos una de las dos siguientes desigualdades:

$$E_1(U', Y') < \max_{X \in S_n} E_1(X, Y'), \quad E_2(X', V') < \max_{Y \in S'_m} E_2(X', Y). \tag{3.5}$$

Supongamos que se da la primera desigualdad. Entonces, existe $Z \in S_n$ tal que

$$E_1(Z, Y') > E_1(U', Y') + 3\varepsilon \tag{3.6}$$

para cierto $\varepsilon > 0$. Como $Y_k \to Y'$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|E_1(Z, Y_k) - E_1(Z, Y')| = |ZAY_k^T - ZAY'^T| = |ZA(Y_k^T - Y'^T)| < \varepsilon \quad \text{si } k \geq k_1;$$

en particular, $E_1(Z, Y') < E_1(Z, Y_k) + \varepsilon$. Por tanto, aplicando (3.6),

$$E_1(Z, Y_k) > E_1(Z, Y') - \varepsilon > E_1(U', Y') + 2\varepsilon \quad \text{si } k \geq k_1. \tag{3.7}$$

Además, como E_1 es continua y se tiene que $U_k \to U'$ y $Y_k \to Y'$, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$E_1(U', Y') > E_1(U_k, Y_k) - \varepsilon \quad \text{si } k \geq k_2. \tag{3.8}$$

Luego, uniendo (3.7) y (3.8), si $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, entonces

$$E_1(Z, Y_k) > E_1(U_k, Y_k) + \varepsilon \quad \text{si } k \geq k_0. \tag{3.9}$$

Por otra parte, como $(U_k, V_k) \in \varpi(X_k, Y_k) = M_1(Y_k) \times M_2(X_k)$, entonces $E_1(U_k, Y_k) = \max_{X \in S_n} E_1(X, Y_k)$, lo que contradice a que, por (3.9), $E_1(U_k, Y_k) < E_1(Z, Y_k) - \varepsilon$.

Si la desigualdad que se diera fuera la segunda en (3.5) se llegaría a contradicción de modo similar, lo que termina de probar que ϖ es semicontinua superiormente.

3. En tercer lugar, es claro que $\varpi(X,Y) \neq \emptyset$ para todo $(X,Y) \in S_n \times S'_m$, ya que, tras dar la definición de conjunto de mejor respuesta, probamos que $M_1(Y) \neq \emptyset \neq M_2(X)$ para todo $(X,Y) \in S_n \times S'_m$.

4. Finalmente, queda probar que $\varpi(X,Y)$ es un conjunto convexo de $S_n \times S'_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ para todo $(X,Y) \in S_n \times S'_m$. Sea $(X_0,Y_0) \in S_n \times S'_m$, y sean (X_1,Y_1), $(X_2,Y_2) \in \varpi(X_0,Y_0)$. Hemos de probar que $(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2, \lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2) \in \varpi(X_0,Y_0)$ para todo $\lambda \in (0,1)$. Para empezar, como S_n y S'_m son convexos, se tiene que $(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2, \lambda Y_1+(1-\lambda)Y_2) \in S_n \times S'_m$. Por hipótesis:

$$\begin{aligned} E_1(X_1,Y_0) &= E_1(X_2,Y_0) = \lambda E_1(X_1,Y_0) + (1-\lambda)E_1(X_2,Y_0) = \max_{X\in S_n} E_1(X,Y_0) \quad \text{y} \\ E_2(X_0,Y_1) &= E_2(X_0,Y_2) = \lambda E_2(X_0,Y_1) + (1-\lambda)E_1(X_0,Y_2) = \max_{Y\in S'_m} E_2(X,Y) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in (0,1)$. Como E_1 y E_2 son aplicaciones lineales en cada variable, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda E_1(X_1,Y_0) + (1-\lambda)E_1(X_2,Y_0) &= E_1(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2, Y_0) \quad \text{y} \\ \lambda E_2(X_0,Y_1) + (1-\lambda)E_2(X_0,Y_2) &= E_2(X_0, \lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2), \end{aligned}$$

lo que implica que $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in M_1(Y_0)$ y $\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2 \in M_2(X_0)$, lo que completa la demostración de la convexidad del conjunto $\varpi(X_0,Y_0)$.

Luego se ha terminado de probar que la función ϖ satisface las hipótesis del teorema de Kakutani, por lo que se tiene que existe $(X^*,Y^*) \in S_n \times S'_m$ tal que $(X^*,Y^*) \in \varpi(X^*,Y^*) = M_1(Y^*) \times M_2(X^*)$, lo que significa que

$$E_1(X^*,Y^*) = \max_{X\in S_n} E_1(X,Y^*) \quad \text{y} \quad E_2(X^*,Y^*) = \max_{Y\in S'_m} E_1(X^*,Y).$$

lo que equivale inmediatamente a que se satisfagan las condiciones (3.1) y (3.2), es decir, que (X^*,Y^*) sea un equilibrio de Nash, lo que concluye la demostración.

■

La demostración del teorema 3.3 ha probado también el siguiente resultado.

Corolario 3.3.1. *(X^*,Y^*) es un equilibrio de Nash si y solo si $(X^*,Y^*) \in M_1(Y^*) \times M_2(X^*)$.*

A continuación, como consecuencia del teorema 3.3 (de Nash), vamos a probar dos resultados que proporcionan condiciones suficientes para la obtención de equilibrios de Nash. El primero de ellos generaliza el teorema 2.3.

Teorema 3.4. *Dado un juego con bimatriz asociada (A,B) de tamaño $n \times m$, un par de estrategias $(X^*,Y^*) \in S_n \times S'_m$ es un equilibrio de Nash si y solo si*

$$\begin{aligned} E_1(i,Y^*) &\leq E_1(X^*,Y^*) \ \text{ para todo } i = 1,2,\ldots,n \quad y \\ E_2(X^*,j) &\leq E_2(X^*,Y^*) \ \text{ para todo } j = 1,2,\ldots,m. \end{aligned}$$

Demostración:

La condición necesaria es trivial. Probemos la condición suficiente. En concreto, hemos de probar que $E_1(X,Y^*) \leq E_1(X^*,Y^*)$ para todo $X \in S_n$. Dado cualquier $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in S_n$, como por hipótesis $E_1(i,Y^*) \leq E_1(X^*,Y^*)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$, resulta entonces que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i E_1(i,Y^*) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i E_1(X^*,Y^*) = E_1(X^*,Y^*).$$

Del mismo modo se prueba que $E_2(X^*,Y) \le E_2(X^*,Y^*)$ para todo $Y \in S'_m$.

■

El siguiente resultado es importante porque generaliza el teorema 2.5 (de equilibrio) a los juegos de suma no nula, permitiendo obtener muchas veces un equilibrio de Nash o comprobar que un par dado lo es.

Teorema 3.5 (**de igualdad de pagos**). *Dado un juego con bimatriz asociada (A,B) de tamaño $n\times m$, sean $X^* = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in S_n$ e $Y^* = (y_1,y_2,\ldots,y_m) \in S'_m$. Si (X^*,Y^*) es un equilibrio de Nash, entonces para cada $i = 1,2,\ldots,n$ tal que $x_i > 0$ se tiene que $E_1(i,Y^*) = E_1(X^*,Y^*)$; y para cada $j = 1,2,\ldots,m$ tal que $y_j > 0$ resulta que $E_2(X^*,j) = E_2(X^*,Y^*)$.*

Demostración:

Supongamos que $x_i > 0$ y $E_1(i,Y^*) < E_1(X^*,Y^*)$. Entonces

$$E_1(X^*,Y^*) = \sum_{k=1}^{n} x_k E_1(k,Y^*) < x_i E_1(X^*,Y^*) + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} x_k E_1(X^*,Y^*) = E_1(X^*,Y^*),$$

que es una contradicción. De modo similar se prueba la segunda parte del resultado.

■

3.3 Métodos para obtener el equilibrio de Nash

En esta sección veremos tres métodos diferentes para la obtención de equilibrios de Nash. El primero es para bimatrices 2×2. El segundo será aplicable a todo tipo de bimatrices $n\times m$, pero únicamente proporciona los equilibrios de Nash que son puntos interiores al dominio $S_n \times S'_m$. Por último, utilizaremos la programación no lineal para procurar encontrar todos los equilibrios de Nash.

Juegos bimatriciales 2×2

En esta subsección vamos a encontrar los equilibrios de Nash de cualquier juego cuya bimatriz asociada (A,B) es de tamaño 2×2.

En este caso, las estrategias de los jugadores son de la forma $X = (x,1-x)$ e $Y = (y,1-y)$, con $x,y \in [0,1]$. El pago esperado de cada jugador para estas estrategias es

$$\begin{aligned} E_1(X,Y) &= [x \; 1-x]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} \\ &= [(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})y + a_{12}-a_{22}]x + (a_{21}-a_{22})y + a_{22} \quad \text{y} \qquad (3.10) \\ E_2(X,Y) &= [x \; 1-x]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} \\ &= [(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})y + b_{12}-b_{22}]x + (b_{21}-b_{22})y + b_{22}. \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Antes de seguir, necesitamos introducir una nueva definición.

Definición 3.9. *Dado un juego con bimatriz asociada (A,B) de tamaño 2×2, sus estrategias son de la forma $X = (x,1-x)$ e $Y = (y,1-y)$, con $x,y \in [0,1]$. Sea $\mathcal{C} = [0,1]\times[0,1]$, y sean f y g las funciones definidas por $f(x,y) = E_1(X,Y)$ y $g(x,y) = E_2(X,Y)$, para todo $(x,y) \in \mathcal{C}$.*

Entonces, se definen los ***conjuntos de reacción racional*** R_1 *y* R_2 *de los jugadores* 1 *y* 2*, respectivamente, como los siguientes subconjuntos del plano:*

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,y) \in \mathcal{C} \mid \max_{0\le z\le 1} f(z,y) = f(x,y)\}, \\ R_2 &= \{(x,y) \in \mathcal{C} \mid \max_{0\le w\le 1} g(x,w) = g(x,y)\}. \end{aligned}$$

En otras palabras, un punto $(x^*,y) \in R_1$ si $x = x^*$ maximiza $f(x,y)$ para un y fijo; lo que equivale a que la estrategia $X^* = (x^*, 1-x^*)$ pertenezca al conjunto de mejor respuesta del jugador 1 a la estrategia $Y = (y, 1-y)$, $M_1(Y)$, definido por (3.3). Del mismo modo, si $(x,y^*) \in R_2$ es porque $Y^* = (y^*, 1-y^*)$ pertenece al conjunto de mejor respuesta del jugador 2 a la estrategia $X = (x, 1-x)$, $M_2(X)$, definido por (3.4).

Por tanto, que $(x^*,y^*) \in R_1 \cap R_2$ equivale a que $X^* \in M_1(Y^*)$ e $Y^* \in M_2(X^*)$, es decir, a que (X^*, Y^*) sea un equilibrio de Nash (corolario 3.3.1).

Vista su importancia para obtener los equilibrios de Nash, veamos como podemos calcular el conjunto $R_1 \cap R_2$. Para obtener R_1 necesitamos encontrar los valores $x \in [0,1]$ que maximicen $f(x,y)$ para cualquier $y \in [0,1]$. Pues bien, dado $y \in [0,1]$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \max_{0\le x\le 1} f(x,y) &= \max_{0\le x\le 1} [xE_1(1,Y) + (1-x)E_1(2,Y)] \\ &= \max_{0\le x\le 1} x[E_1(1,Y) - E_1(2,Y)] + E_1(2,Y) \\ &= \begin{cases} E_1(2,Y) & \text{si } E_1(1,Y) < E_1(2,Y), \\ E_1(1,Y) & \text{si } E_1(1,Y) > E_1(2,Y), \\ E_1(2,Y) & \text{si } E_1(1,Y) = E_1(2,Y), \end{cases} \end{aligned}$$

donde el máximo se ha alcanzado en $x = 0$, $x = 1$ y en todo $x \in [0,1]$, respectivamente.

Como $E_1(1,Y) = {}_1AY^T = a_{11}y + a_{12}(1-y)$ y $E_1(2,Y) = {}_2AY^T = a_{21}y + a_{22}(1-y)$, entonces es claro que $E_1(1,Y) < E_1(2,Y)$ si y solo si $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y + a_{12} - a_{22} < 0$, y del mismo modo se forman con los signos igual ('$=$') y mayor ('$>$').

Sea $\Gamma(y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y + a_{12} - a_{22}$ para todo $y \in [0,1]$. Como la gráfica de Γ es un segmento de recta, una información importante sobre el signo que puede tomar la dan sus valores extremos:

$$\Gamma(0) = a_{12} - a_{22} \quad \text{y} \quad \Gamma(1) = a_{11} - a_{21}.$$

A continuación, consideramos todas las posibles situaciones de Γ en función del signo que toman sus valores extremos, y determinamos el correspondiente conjunto R_1.

1. $\Gamma(0) < 0$ y $\Gamma(1) < 0$, con lo que resulta que $a_{11} < a_{21}$ y $a_{12} < a_{22}$. Esto significa que la segunda estrategia del jugador 1 domina a la primera (caso que no tiene mucho interés, puesto que podría simplificarse por dominancia). Observemos que el máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 0$ para todo $y \in [0,1]$. Luego $R_1 = \{0\} \times [0,1]$, es decir, R_1 es el lado vertical izquierdo del cuadrado $\mathcal{C}$.

2. $\Gamma(0) < 0 = \Gamma(1)$, es decir, $a_{11} = a_{21}$ y $a_{12} < a_{22}$ (la segunda estrategia del jugador 1 domina no estrictamente a la segunda). En este caso, el máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 0$ para todo $y \in [0,1)$ y en todo $x \in [0,1]$ si $y = 1$. Luego $R_1 = (\{0\} \times [0,1)) \cup ([0,1] \times \{1\})$, es decir, R_1 es la unión del lado vertical izquierdo y el lado horizontal superior de $\mathcal{C}$.

3. $\Gamma(0) = 0 > \Gamma(1)$, es decir, $a_{11} < a_{21}$ y $a_{12} = a_{22}$ (vuelve a haber una dominancia no estricta). En este caso, el máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 0$ para todo $y \in (0,1]$ y en todo $x \in [0,1]$ si $y = 0$. Por tanto, $R_1 = (\{0\} \times (0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$, es decir, R_1 es la unión del lado vertical izquierdo y el lado horizontal inferior de $\mathcal{C}$.

4. $\Gamma(0) > 0$ y $\Gamma(1) > 0$, es decir, $a_{11} > a_{21}$ y $a_{12} > a_{22}$: la segunda estrategia del jugador 1 podría eliminarse al ser dominada por la primera. El máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 1$ para todo $y \in [0,1]$, por lo que $R_1 = \{1\} \times [0,1]$: es el lado vertical derecho de $\mathcal{C}$.

5. $\Gamma(0) > 0 = \Gamma(1)$, es decir, $a_{11} = a_{21}$ y $a_{12} > a_{22}$ (hay una dominancia no estricta). En este caso, el máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 1$ para todo $y \in [0,1)$ y en todo $x \in [0,1]$ si $y = 1$. Luego $R_1 = (\{1\} \times [0,1)) \cup ([0,1] \times \{1\})$: es la unión del lado vertical derecho con el lado horizontal superior de $\mathcal{C}$.

6. $\Gamma(0) = 0 < \Gamma(1)$, es decir, $a_{11} > a_{21}$ y $a_{12} = a_{22}$ (dominancia no estricta). El máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 1$ para todo $y \in (0,1]$ y en todo $x \in [0,1]$ si $y = 0$. Luego $R_1 = (\{1\} \times (0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$: es la unión de los lados vertical derecho y horizontal inferior de $\mathcal{C}$.

7. $\Gamma(0) < 0 < \Gamma(1)$, por lo que existe $y_0 \in (0,1)$ tal que $\Gamma(y_0) = 0$. Es el caso en el que $a_{11} > a_{21}$ y $a_{12} < a_{22}$. El máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 0$ para todo $y \in [0,y_0)$, en $x = 1$ para todo $y \in (y_0,1]$ y en todo $x \in [0,1]$ si $y = y_0$. Luego $R_1 = (\{0\} \times [0,y_0)) \cup ([0,1] \times y_0) \cup (\{1\} \times (y_0,1])$, es decir, R_1 es una poligonal de tres segmentos en forma de escalera ascendente, con extremos $(0,0)$ y $(1,1)$.

8. $\Gamma(0) > 0 > \Gamma(1)$, por lo que existe $y_0 \in (0,1)$ tal que $\Gamma(y_0) = 0$ y se tiene que $a_{11} < a_{21}$ y $a_{12} > a_{22}$. El máximo de $f(x,y)$ se alcanza en $x = 1$ para todo $y \in [0,y_0)$, en $x = 0$ para todo $y \in (y_0,1]$ y en todo $x \in [0,1]$ si $y = y_0$. Luego $R_1 = (\{1\} \times [0,y_0)) \cup ([0,1] \times y_0) \cup (\{0\} \times (y_0,1])$, esto es, R_1 es una poligonal de tres segmentos en forma de escalera descendente, con extremos $(0,1)$ y $(1,0)$.

9. $\Gamma(0) = \Gamma(1) = 0$ ($\Gamma(y) = 0$ para todo $y \in [0,1]$), esto es, $a_{11} = a_{21}$ y $a_{12} = a_{22}$ (las dos estrategias del jugador 1 son idénticas, por lo que podría eliminarse una de ellas). El máximo de $f(x,y)$ se alcanza en todo $x \in [0,1]$ para todo $y \in [0,1]$. Luego $R_1 = \mathcal{C}$.

Obtengamos ahora R_2, encontrando los valores $y \in [0,1]$ que maximicen $g(x,y)$ para cada $x \in [0,1]$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\max_{0\le y\le 1} g(x,y) &= \max_{0\le y\le 1} [E_2(X,1)y + E_2(X,2)(1-y)] \\
&= \max_{0\le y\le 1} [E_2(X,1) - E_2(X,2)]y + E_2(X,2) \\
&= \begin{cases} E_2(X,2) & \text{si } E_2(X,1) < E_2(X,2), \\ E_2(X,1) & \text{si } E_2(X,1) > E_2(X,2), \\ E_2(X,2) & \text{si } E_2(X,1) = E_2(X,2), \end{cases}
\end{aligned}$$

donde el máximo se ha alcanzado en $y = 0$, $y = 1$ y en todo $y \in [0,1]$, respectivamente.

Como $E_2(X,1) = XB_1 = xb_{11} + (1-x)b_{21}$ y $E_2(X,2) = XB_2 = xb_{12} + (1-x)b_{22}$, entonces es claro que $E_2(X,1) < E_2(X,2)$ si y solo si $(b_{11} - b_{21} - b_{12} + b_{22})x + b_{21} - b_{22} < 0$, y del mismo modo se forman con los signos igual (‘=’) y mayor (‘>’).

Sea $\Upsilon(x) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})x + b_{21} - b_{22}$ para todo $x \in [0,1]$. Como la gráfica de Υ es un segmento de recta, está determinado por sus valores extremos $\Upsilon(0) = b_{12} - b_{22}$ y $\Upsilon(1) = b_{11} - b_{21}$. A continuación, estudiamos todas las posibles situaciones de Υ en función del signo que toman $\Upsilon(0)$ y $\Upsilon(1)$, y obtenemos el correspondiente conjunto R_2.

1. $\Upsilon(0) < 0$ y $\Upsilon(1) < 0$, esto es, $b_{11} < b_{12}$ y $b_{21} < b_{22}$, lo que significa que la segunda estrategia del jugador 2 domina a la primera, que podría eliminarse. El máximo de $g(x,y)$ se alcanza en $y = 0$ para todo $x \in [0,1]$, luego $R_2 = [0,1] \times \{0\}$, es decir, R_2 es el lado horizontal inferior de $\mathcal{C}$.

2. $\Upsilon(0) < 0 = \Upsilon(1)$, es decir, $b_{11} = b_{12}$ y $b_{21} < b_{22}$. El máximo de $g(x,y)$ se alcanza en $y = 0$ para todo $x \in [0,1)$, y en todo $y \in [0,1]$ si $x = 1$. Por tanto, $R_2 = ([0,1) \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,1])$: es la unión de los lados horizontal inferior y vertical derecho de $\mathcal{C}$.

3. $\Upsilon(0) = 0 > \Upsilon(1)$, o sea, $b_{11} < b_{12}$ y $b_{21} = b_{22}$. Se obtiene de la misma forma que $R_2 = ((0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ (unión de los lados horizontal inferior y vertical izquierdo de $\mathcal{C}$).

4. $\Upsilon(0) > 0$ y $\Upsilon(1) > 0$, esto es, $b_{11} > b_{12}$ y $b_{21} > b_{22}$ (la primera estrategia del jugador 2 domina a la segunda). Es inmediato que $R_2 = [0,1] \times \{1\}$ (el lado horizontal superior de $\mathcal{C}$).

5. $\Upsilon(0) > 0 = \Upsilon(1)$, esto es, $b_{11} = b_{12}$ y $b_{21} > b_{22}$. El máximo de $g(x,y)$ se alcanza en $y = 1$ para todo $x \in [0,1)$ y en todo $y \in [0,1]$ si $x = 1$, con lo que $R_2 = ([0,1) \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [0,1])$ (unión de los lados horizontal superior y vertical derecho de $\mathcal{C}$).

6. $\Upsilon(0) = 0 < \Upsilon(1)$, o sea, $b_{11} > b_{12}$ y $b_{21} = b_{22}$. Se obtiene inmediatamente que $R_2 = ((0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ (unión de los lados horizontal superior y vertical izquierdo de $\mathcal{C}$.

7. $\Upsilon(0) < 0 < \Upsilon(1)$, con lo que $\Upsilon(x_0) = 0$ para cierto $x_0 \in (0,1)$. Es el caso en que $b_{11} > b_{12}$ y $b_{21} < b_{22}$. El máximo de $g(x,y)$ se alcanza en $y = 0$ para todo $x \in [0,x_0)$, en $y = 1$ para todo $x \in (x_0,1]$ y en todo $y \in [0,1]$ si $x = x_0$. Luego $R_2 = ([0,x_0) \times \{0\}) \cup (x_0 \times [0,1]) \cup ((x_0,1] \times \{1\})$, es decir, R_2 es una poligonal de tres segmentos en forma de escalera ascendente, con extremos $(0,0)$ y $(1,1)$.

8. $\Upsilon(0) > 0 > \Upsilon(1)$, con lo que $\Upsilon(x_0) = 0$ para cierto $x_0 \in (0,1)$. Es el caso en que $b_{11} < b_{12}$ y $b_{21} > b_{22}$. El máximo de $g(x,y)$ se alcanza en $y = 1$ para todo $x \in [0,x_0)$, en $y = 0$ para todo $x \in (x_0,1]$ y en todo $y \in [0,1]$ si $x = x_0$. Luego $R_2 = ([0,x_0) \times \{1\}) \cup (x_0 \times [0,1]) \cup ((x_0,1] \times \{0\})$: es una poligonal de tres segmentos en forma de escalera descendente, con extremos $(0,1)$ y $(1,0)$.

9. $\Upsilon(0) = \Upsilon(1) = 0$, es decir, $b_{11} = b_{12}$ y $b_{21} = b_{22}$ (las dos estrategias del jugador 2 son idénticas, por lo que una se puede eliminar). El máximo de $g(x,y)$ se alcanza en todo $y \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$. Luego $R_2 = \mathcal{C}$.

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de los cálculos anteriores.

Ejemplo 3.5. *Una pareja está pensando quién se queda en casa con los niños y quién puede salir a correr, ya que no encuentran una persona que se quede con ellos. La bimatriz de pagos* *es*

J1 \ J2	Casa	Correr
Casa	$10,10$	$\overline{5},\overline{13}$
Correr	$\overline{13},\overline{5}$	$0,0$

$$\Leftrightarrow \quad A=\begin{bmatrix}10 & 5\\ 13 & 0\end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix}10 & 13\\ 5 & 0\end{bmatrix}.$$

Se ha marcado el máximo valor de las columnas de A y el mayor de las filas de B. Por tanto, $(5,13)$ y $(13,5)$ son equilibrios de Nash para estrategias puras.

En este caso, $\Gamma(y)=(10-5-13)y+5=5-8y$ para todo $y\in[0,1]$, y $\Upsilon(x)=(10-13-5)x+5=5-8x$ para todo $x\in[0,1]$. Luego $\Gamma(0)=\Upsilon(0)=5>0$, $\Gamma(1)=\Upsilon(1)=-3<0$ y $\Gamma(\frac{5}{8})=\Upsilon(\frac{5}{8})=0$. Aplicando el caso 8 para ambas funciones, obtenemos que los conjuntos de reacción racional de los jugadores 1 y 2 son

$$\begin{aligned} R_1 &= \Big(\{1\}\times[0,\tfrac{5}{8})\Big)\cup\Big([0,1]\times\tfrac{5}{8}\Big)\cup\Big(\{0\}\times(\tfrac{5}{8},1]\Big),\\ R_2 &= \Big([0,\tfrac{5}{8})\times\{1\}\Big)\cup\Big(\tfrac{5}{8}\times[0,1]\Big)\cup\Big((\tfrac{5}{8},1]\times\{0\}\Big), \end{aligned}$$

que son los conjuntos representados en la figura 3.1, cuya intersección es

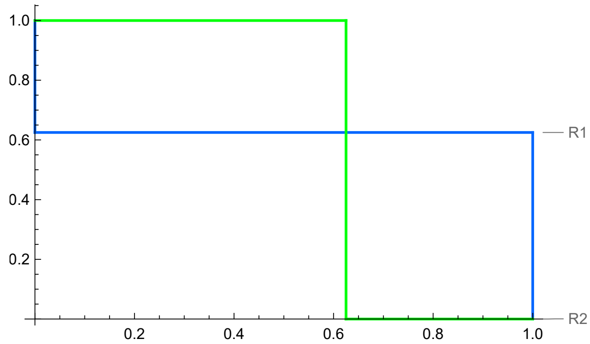

Figura 3.1: Representación de los conjuntos R_1 y R_2

$$R_1\cap R_2=\{(0,1),(\tfrac{5}{8},\tfrac{5}{8}),(1,0)\}.$$

Por tanto, los pagos esperados óptimos para cada jugador son $E_1(X,Y)$ y $E_2(X,Y)$, con $X=(x,1-x)$, $Y=(y,1-y)$, y $(x,y)\in R_1\cap R_2$. Aplicando (3.10) y (3.11), se obtiene que

$$E_1(X,Y)=(-8y+5)x+13y \quad y \quad E_2(X,Y)=(-8y+13)x+5y. \tag{3.12}$$

Luego los pagos esperados óptimos son:

- *Para $(x,y)=(0,1)$, $E_1(X,Y)=13$ y $E_2(X,Y)=5$.*
- *Para $(x,y)=(1,0)$, $E_1(X,Y)=5$ y $E_2(X,Y)=13$.*
- *Para $(x,y)=(\frac{5}{8},\frac{5}{8})$, $E_1(X,Y)=\frac{65}{8}=8{,}125$ y $E_2(X,Y)=\frac{65}{8}=8{,}125$.*

Es decir, se han obtenido tres puntos de silla, dos de ellos, los que ya teníamos para estrategias puras, y uno más para estrategias mixtas.

Como podemos observar, si los jugadores usan los equilibrios de Nash con las estrategias puras, la diferencia entre el pago de un jugador y el otro es mayor que si usan el equilibro *de Nash con estrategias mixtas. Esto significa, que la estrategia mixta nos da la posibilidad de encontrar un equilibrio de Nash donde el beneficio de ambos jugadores es bueno y equilibrado, no obstante en la siguiente sección veremos qué criterios seguir para la elección del equilibrio de Nash.*

Por supuesto, con los tres equilibrios obtenidos se ha asegurado obtener el pago mínimo del juego, como afirma el teorema 3.1 ya que si calculamos la estrategia maximín de cada jugador observamos que el valor del juego para la matriz A —y para la matriz B^T, puesto que $B^T = A$— es $\underline{v} = \overline{v} = v(A) = 5$, el cual es el pago asegurado mínimo que puede obtener el jugador 1 (y el jugador 2). En efecto, $E_1(X^*, Y^*) \geq v(A)$ y $E_2(X^*, Y^*) \geq v(B^T)$ para cualquier equilibrio de Nash (X^*, Y^*).

Obtención de equilibrios de Nash interiores

En este apartado veremos como obtener equilibrios de Nash para cualquier juego. Si este tiene como bimatriz a (A, B), de tamaño $n \times m$, encontraremos los equilibrios de Nash que se encuentran en el interior del conjunto $S_n \times S'_m$.

Este método consiste en obtener los puntos que son equilibrios de Nash interiores estudiando los puntos críticos de las funciones $E_1(X, Y)$ y $E_2(X, Y)$ (cuyas variables son las de las estrategias X e Y), y de ahí deducir los puntos donde se alcanzan los máximos.

Como para todo $(X, Y) \in S_n \times S'_m$ se tiene que $x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ e $y_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j$, podemos expresar los pagos esperados como función de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, considerando fijas las variables de Y cuando maximicemos $E_1(X, Y)$ en X, y fijas las variables de X cuando maximicemos $E_2(X, Y)$ en Y. En cualquier caso, permanezcan fijas o no las variables, podemos considerar

$$\begin{aligned} E_1(X, Y) &= E_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ E_2(X, Y) &= E_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}). \end{aligned}$$

En concreto, $E_1(X, Y) = XAY^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$. Sustituyendo $x_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$, queda

$$E_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i a_{ij} y_j + \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) a_{nj} y_j \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(a_{nj} y_j + \sum_{i=1}^{n-1} x_i a_{ij} y_j - \sum_{k=1}^{n-1} x_k a_{nj} y_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{nj} y_j + \sum_{i=1}^{n-1} x_i (a_{ij} - a_{nj}) y_j \right).$$

Y $E_2(X, Y) = XBY^T = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} y_j$. Sustituyendo $y_m = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} y_k$, queda

$$E_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m-1} x_i b_{ij} y_j + x_i b_{im} \left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} y_k \right) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i b_{im} + \sum_{j=1}^{m-1} x_i b_{ij} y_j - \sum_{k=1}^{m-1} x_i b_{im} y_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i b_{im} + \sum_{j=1}^{m-1} x_i (b_{ij} - b_{im}) y_j \right).$$

Para obtener los puntos críticos de estas funciones, obtenemos las derivadas parciales correspondientes e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_1}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_m) &= \sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-a_{nj})y_j = 0 \text{ para todo } i=1,2,\ldots,n-1,\\ \frac{\partial E_2}{\partial y_j}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(b_{ij}-b_{im})x_i = 0 \text{ para todo } j=1,2,\ldots,m-1.\end{aligned}$$

En definitiva, para obtener los puntos críticos habría que resolver los siguientes sistemas de ecuaciones $n\times m$ y $m\times n$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-a_{nj})y_j = 0 \quad (1\le i\le n-1),\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}-b_{im})x_i = 0 \quad (1\le j\le m-1),\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\end{cases}$$

cuyas soluciones, que denotamos $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ e $(y_1^*,y_2^*,\ldots,y_m^*)$ deben satisfacer que $x_i^*>0$ para todo $i=1,2,\ldots,n$ e $y_j^*>0$ para todo $j=1,2,\ldots,m$ para que puedan ser equilibrios de Nash interiores.

Observemos que $\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-a_{nj})y_j^*=0$ equivale a que

$$E_1(i,Y^*) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j^* = \sum_{j=1}^{m} a_{nj}y_j^* = E_1(n,Y^*),$$

y esto ocurre para todo $i=1,2,\ldots,n-1$. Luego todos los $E_1(i,Y^*)$ valen lo mismo, digamos α, para todo $i=1,2,\ldots,n$. Por tanto, para cualquier $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S_n$ resulta que $E_1(X,Y^*)=\sum_{i=1}^{n}x_iE_1(i,Y^*)=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i=\alpha=E_1(i,Y^*)$ para todo $i=1,2,\ldots,n$. Del mismo modo se llega a que $E_2(X^*,Y)=E_2(X^*,j)$ para todo $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in S'_m$ y todo $j=1,2,\ldots,m$. En particular, se obtiene que $E_1(X^*,Y^*)=E_1(i,Y^*)$ para todo $i=1,2,\ldots,n$ y que $E_2(X^*,Y^*)=E_2(X^*,j)$ para todo $j=1,2,\ldots,m$. Lo que por el teorema 3.4 nos lleva a que (X^*,Y^*) es un equilibrio de Nash.

A continuación, mostramos un ejemplo.

Ejemplo 3.6. *Consideramos el juego introducido en el ejemplo 3.5. En este caso, aplicando (3.12) se obtiene*

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_1}{\partial x}(x,y) &= 5-8y=0 \Leftrightarrow y=\frac{5}{8}>0,\\ \frac{\partial E_2}{\partial y}(x,y) &= 5-8x=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{8}>0.\end{aligned}$$

Luego el único equilibrio de Nash interior al dominio $S_2\times S'_2$ es (X^*,Y^*), con $X^*=Y^*=(\frac{5}{8},\frac{3}{8})$.

A diferencia del método anterior, cuando calculamos los equilibrios de Nash con los conjuntos de reacción racional, en este caso no se obtienen los equilibrios de Nash con estrategias puras, puesto que estos no pertenecen al interior del dominio. En la siguiente subsección veremos otro método general que sí permite obtener todos los equilibrios de Nash.

Programación no lineal: algoritmo de Lemke-Howson

Para encontrar todos los equilibrios de Nash de una matriz de cualquier tamaño, podemos emplear la programación no lineal. La programación no lineal permite encontrar los máximos o mínimos de una función de varias variables —la llamada función objetivo— sometida a ciertas restricciones, cuando dicha función o alguna de las restricciones sean no lineales.

Plantearemos un problema de programación no lineal en el que la función objetivo es cuadrática y las restricciones son lineales. En este problema de programación no lineal se han utilizado distintas técnicas para abordarlo, tanto teóricas como numéricas. Aquí utilizaremos el algoritmo de Lemke-Howson [4], que se muestra en el siguiente resultado. En su enunciado, de nuevo $J_n = (1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$, $J_m = (1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^m$ y la desigualdad entre vectores representará la desigualdad componente a componente.

Teorema 3.6. *Se considera un juego con bimatriz asociada (A,B) de tamaño $n\times m$. Entonces $(X^*,Y^*) \in S_n \times S_m$ es un equilibrio de Nash de dicho juego si y solo si es una solución, junto con dos escalares p^* y q^*, del siguiente programa no lineal:*

maximizar $f(X,Y,p,q) = XAY^T + XBY^T - p - q$ sujeto a las restricciones

$$AY^T \leq pJ_n^T, \quad B^TX^T \leq qJ_m^T, \quad X \geq 0, \quad Y \geq 0, \quad XJ_n^T = 1, \quad YJ_m^T = 1.$$

Además sucede que $p^* = E_1(X^*,Y^*)$ y $q^* = E_2(X^*,Y^*)$.

Demostración:

Recordemos que $(X^*,Y^*) \in S_n \times S_m$ es un equilibrio de Nash si solo si $X^*AY^{*T} \geq XAY^{*T}$ y $X^*BY^{*T} \geq X^*BY^T$ para cualesquiera $X \in S_n$ e $Y \in S_m'$. En particular,

$$X^*AY^{*T} \geq {}_iAY^{*T} \text{ y } X^*BY^{*T} \geq X^*B_j \text{ para cualesquiera } i = 1,2,\dots,n \text{ y } j = 1,2,\dots,m.$$

Uniendo todas las componentes anteriores en un solo vector, se puede expresar lo anterior como

$$X^*AY^{*T}J_n^T \geq AY^{*T} \quad \text{y} \quad X^*BY^{*T}J_m \geq X^*B. \tag{3.13}$$

Al revés, si se cumplen las igualdades (3.13), se tiene que (X^*,Y^*) es un equilibrio de Nash (las dos implicaciones las conocemos por el teorema 3.4). Es decir, (X^*,Y^*) es un equilibrio de Nash si y solo si se satisface la condición (3.13).

Pues bien, vamos a probar que si (X^*,Y^*) es un equilibrio de Nash, $p^* = E_1(X^*,Y^*) = X^*AY^{*T}$ y $q^* = E_2(X^*,Y^*) = X^*BY^{*T}$, entonces (X^*,Y^*,p^*,q^*) es una solución del programa no lineal planteado. Lo primero que hay que comprobar es que satisface todas las restricciones, es decir, que (X^*,Y^*,p^*,q^*) es un punto factible del programa, lo que es trivial: por ejemplo, veamos que $B^TX^{*T} \leq q^*J_m^T$. Transponiendo en ambos miembros, esta desigualdad equivale a que $X^*B \leq q^*J_m = X^*BY^{*T}J_m$, lo que se satisface por la segunda parte de la ecuación (3.13).

Ahora probaremos que (X^*,Y^*,p^*,q^*) maximiza la función objetivo $f(X,Y,p,q)$. Por definición de p^* y q^* es claro que $f(X^*,Y^*,p^*,q^*) = 0$. Por tanto, se trata de probar que $f(X,Y,p,q) \leq 0$ para todo punto factible (X,Y,p,q) del programa. Por ser factible, este punto cumple que $AY^T \leq pJ_n^T$ y $B^TX^T \leq qJ_m^T$, lo que implica que

$$XAY^T \leq pXJ_n^T = p \quad \text{y} \quad XBY^T \leq qJ_mY^T = q,$$

lo que implica inmediatamente que $f(X,Y,p,q) \leq 0$. Queda probado, por tanto, que si (X^*,Y^*) es un equilibrio de Nash, entonces (X^*,Y^*,p^*,q^*) (con $p^* = E_1(X^*,Y^*)$ y $q^* =$

$E_2(X^*, Y^*))$ es una solución del programa. A la par, como existe un equilibrio de Nash en todo juego, hemos probado que el máximo valor que toma la función objetivo en el conjunto factible es 0. Queda por probar el resultado opuesto.

Sea (X_0, Y_0, p_0, q_0) una solución del programa. Por la primera parte de la demostración, sabemos que $f(X_0, Y_0, p_0, q_0) = 0$. Hemos de probar que (X_0, Y_0) es un equilibrio de Nash. Por hipótesis, $AY_0^T \le p_0 J_n^T$ y $B^T X_0^T \le q_0 J_m^T$ (que equivale a $X_0 B \le q_0 J_m$). Por tanto,

$$X_0 A Y_0^T \le p_0 X_0 J_n^T = p_0 \quad \text{y} \quad X_0 B Y_0^T \le q_0 J_m Y_0^T = q_0.$$

Luego $X_0 A Y_0^T - p_0 \le 0$, $X_0 B Y_0^T - q_0 \le 0$ y sumando estas dos desigualdades se obtiene que $f(X_0, Y_0, p_0, q_0) \le 0$, que sabemos que es una igualdad. Por tanto, $X_0 A Y_0^T = p_0$ y $X_0 B Y_0^T = q_0$, lo que implica que

$$AY_0^T \le p_0 J_n^T = X_0 A Y_0^T J_n^T \quad \text{y} \quad X_0 B \le X_0 B Y_0^T J_m,$$

que, por la ecuación (3.13), equivale a que (X_0, Y_0) es un equilibrio de Nash, lo que completa la demostración.

■

Observe que para los juegos de suma cero necesitamos plantear dos programas lineales. Ahora nos ha bastado un solo programa no lineal.

Ejemplo 3.7. *Consideramos de nuevo el juego de los ejemplos 3.5 y 3.6. La función objetivo del programa es, en este caso,*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, y_1, y_2, p, q) &= (x_1, x_2)(A + B)(y_1, y_2)^T - p - q \\ &= (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 20 & 18 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}(y_1, y_2)^T - p - q \\ &= (20y_1 + 18y_2)x_1 + 18y_1x_2 - p - q. \end{aligned}$$

Las restricciones que deben cumplirse son $AY^T \le pJ_2^T$, $B^T X^T \le qJ_2^T$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $x_1 + x_2 = 1$ e $y_1 + y_2 = 1$. Las dos primeras pueden desarrollarse de la siguiente forma:

$$10y_1 + 5y_2 \le p, \quad 13y_1 \le p, \quad 10x_1 + 5x_2 \le q, \quad 13x_1 \le q.$$

Utilizando Mathematica como se muestra en el anexo, se llega al mismo resultado que en el ejemplo 3.5.

3.4 Elección del equilibrio de Nash

En las secciones anteriores hemos visto que en un juego podemos obtener más de un equilibrio de Nash, por lo que es normal que nos preguntemos cuál es el mejor, con cuál deberíamos quedarnos. En esta sección mostraremos diferentes criterios que pueden usarse para elegir un equilibrio de Nash entre varios, pero no hay ninguno que sea definitivo, que sea el mejor de todos.

Estrategias estables

La primera idea es utilizar algún tipo de estabilidad para seleccionar el equilibrio de Nash. Una primera aproximación en este sentido es considerar el siguiente proceso: se parte de una estrategia pura de cualquier jugador M y se toma entonces la estrategia pura del otro jugador N que sea la mejor respuesta a la del jugador M. A continuación, se ve cuál es la estrategia de mejor respuesta contra esta que tiene el jugador M y luego la de mejor respuesta del jugador N contra esta última, y así sucesivamente. Si este proceso concluye siempre, se parta de la estrategia que se parta, en el mismo pago, que corresponde a un equilibro de Nash, dicho equilibrio es estable. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.8. *Se considera un juego de suma cero cuya matriz es*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como $\overline{v} = \underline{v} = 1$, el juego tiene un punto de silla (en definitiva, un equilibrio de Nash) para las estrategias puras $X = (1,0,0)$ e $Y = (0,1,0)$. Solo tiene un equilibrio de Nash, que vamos a ver que es estable en el sentido que hemos dicho. Por ejemplo, si el jugador 2 empieza el juego con la columna 1, la mejor estrategia del jugador 1 contra dicha estrategia pura es la fila 2; y la mejor estrategia del jugador 2 contra dicha fila es la columna 3. Siguiendo este proceso, se pasa sucesivamente por las siguientes estrategias: fila 3, columna 2, fila 1, columna 2, fila 1, columna 2, fila 1...: se ha llegado al equilibrio de Nash (punto de silla). Además, se ha pasado por todas las filas y columnas: luego desde cualquiera de ellas se llega al equilibrio de Nash, que es por tanto estable.

Pero no ocurre siempre que cuando solo hay un equilibrio de Nash este tenga que ser estable, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. *Sea la matriz*

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $\underline{v} = \overline{v} = 4$ y que el único punto de silla es $(2,2)$. Si el jugador 1 elige la fila 1, la mejor estrategia de respuesta del jugador 2 es la columna 3; a esta el jugador 1 responde con la fila 3, a lo que el jugador 2 responde con la columna 1 y el jugador 1 vuelve a elegir la fila 1. Entonces se repetirían todos los pasos dados desde el principio hasta el infinito. No ha habido una convergencia hacia el equilibrio de Nash (punto de silla). Solo habría habido convergencia hacia este, si el jugador 1 hubiera empezado a jugar con la fila 2 o el jugador 2 hubiera empezado con la columna 2. Luego este equilibrio de Nash, aun siendo el único, no es estable.

Veamos un ejemplo con más de un equilibrio de Nash.

Ejemplo 3.10. *En el juego del ejemplo 3.5, si el jugador 2 empieza con la columna 2, que es donde obtiene el mayor pago, entonces el jugador 1 elegiría la fila 1, y se acabaría la sucesión de elecciones en el equilibrio de Nash $(1,2)$ (con pagos $(5,13)$). Pero si empieza el jugador 1 con la fila 2, la mejor respuesta del jugador 2 es la columna 1 y nos quedaríamos en el otro equilibrio de Nash (con pagos $(13,5)$). Los otros dos posibles puntos de partida llevan* *también a uno y otro equilibrios de Nash. En este caso dependiendo de que estrategia se use primero se llega a un equilibrio u otro por lo que no hay una estrategia estable.*

Dominancia en cuanto al riesgo

Otro criterio que se puede seguir para elegir un equilibrio de Nash entre otros es por el riesgo que se corre si se pierde ese equilibrio. Lo explicamos con un ejemplo.

Ejemplo 3.11. *Sea un juego cuya bimatriz es*

$J1 \backslash J2$	A	B
a	$\overline{5}, \overline{5}$	$0, 4$
b	$4, 0$	$\overline{2}, \overline{2}$

Es claro que $X = Y = (1,0)$ y $X = Y = (0,1)$ son equilibrios de Nash para estrategias puras (también hay uno para estrategias mixtas, que no necesitamos considerar). Si los jugadores siguen las estrategias $X = Y = (1,0)$, entonces ambos obtienen el mejor pago posible. Pero supongamos que los jugadores tienen bastantes dudas de lo que el otro jugador vaya a hacer. Si uno de los jugadores mantiene la estrategia $(1,0)$ pero el otro cambia a la estrategia $(0,1)$ este perdería un 20 % del pago, pero el primero lo perdería todo. Sin embargo, si se opta directamente por la estrategia $(0,1)$ al menos uno se asegura 2 unidades de pago, que incluso podría duplicar. En este sentido, el equilibrio de Nash $X = Y = (0,1)$ domina, en cuanto al riesgo, al equilibrio $X = Y = (1,0)$.

En un juego, cuanto mayor riesgo e incertidumbre haya sobre qué estrategia escogerá el contrincante, es más probable que se juegue con el equilibrio de Nash que sea dominante en cuanto al riesgo.

Dominancia en cuanto al pago

El último criterio que veremos para elegir un equilibrio de Nash es el más claro de los tres comentados aquí. Para introducirlo, necesitaremos el siguiente concepto.

Definición 3.10. *Para un juego dado, con funciones de pagos $E_1(X,Y)$ y $E_2(X,Y)$, decimos que (X^*,Y^*) es un* ***óptimo de Pareto*** *si satisface lo siguiente:*

a) Si $E_1(X,Y^*) > E_1(X^*,Y^*)$ para cierta estrategia X, entonces $E_2(X,Y^*) < E_2(X^*,Y^*)$;

b) Si $E_2(X^*,Y) > E_2(X^*,Y^*)$ para cierta estrategia Y, entonces $E_1(X^*,Y) < E_1(X^*,Y^*)$.

A continuación introducimos un nuevo criterio para elegir entre los equilibrios de Nash de un juego.

Definición 3.11. *Un equilibrio de Nash de un juego es* ***dominante en cuanto al pago*** *si es un óptimo de Pareto al compararlo con todos los demás equilibrios de Nash de ese juego.*

Como podemos observar en el ejemplo 3.5 ninguno de los tres equilibrios de Nash es dominante. Sin embargo, en ejemplo 3.11 es claro que el equilibrio que era dominado en cuanto al riesgo es el dominante en cuanto al pago: $X = Y = (1,0)$ no solo domina al otro equilibrio de Nash para estrategias puras, sino también al equilibrio de Nash para estrategias mixtas, que puede demostrarse que es $X = Y = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y cumple que $E_1(X,Y) = E_2(X,Y) = \frac{10}{3}$.

4 Conclusión

En este trabajo, nuestro objetivo ha sido presentar la teoría de juegos mediante el estudio de la resolución de dos tipos de juegos bipersonales, los juegos de suma cero y los de suma no nula. En ambos casos se han estudiado las distintas estrategias que se pueden diseñar: estrategias puras y mixtas, aunque el objetivo principal eran estas últimas que, de hecho, incluyen a las primeras.

Para llegar a nuestro primer objetivo, la resolución de juegos de suma cero, tuvimos que introducir el resultado más importante de este capítulo, el teorema minimax de Von Neumann, que tiene también numerosas aplicaciones fuera de la teoría de juegos. Este resultado asegura que con estrategias mixtas (a diferencia de lo que ocurre con estrategias puras) siempre existen estrategias óptimas, es decir, que optimizan en cierto modo los pagos a los jugadores. Se alcanzan en lo que se denomina puntos de silla.

Para la obtención de dichas estrategias, se han introducido cinco métodos aplicables a distintos juegos, según el tipo de su matriz de pagos:

- Cuando esta es 2×2, proporcionamos fórmulas explicitas de las estrategias óptimas de los jugadores en el caso menos simple: cuando la matriz no tiene puntos de silla para estrategias puras.

- Cuando su tamaño es $2 \times m$ o $n \times 2$, y para el caso menos simple mencionado, se introduce un método que obtiene la solución óptima mediante la representación gráfica de m o n segmentos de recta, respectivamente.

- El método de eliminación de estrategias dominadas es útil como herramienta para reducir el tamaño de las matrices de pagos más que para resolver el juego, ya que pocas veces pueden resolverse de esta forma.

- Para matrices $n \times n$ inversibles desarrollamos otro método que proporciona explícitamente, en muchos casos, las estrategias óptimas y el pago óptimo del juego.

- Por último, un método que aplica la programación lineal, permite resolver juegos con cualquier tipo de matriz de pagos.

El segundo objetivo principal del trabajo era la resolución de los juegos de suma no nula, que es un caso mucho más frecuente que el anterior. A ellos dedicamos el capítulo 3. En este capítulo se mostró el resultado principal de la teoría de juegos, el teorema de Nash, que asegura la existencia de equilibrios de Nash para estrategias mixtas en todo juego de suma no nula. Estos equilibrios de Nash producen un resultado óptimo en el mismo sentido que los puntos de silla en juegos de suma cero.

Para obtener explícitamente los equilibrios de Nash se han introducido tres métodos de resolución:

- Para juegos bimatriciales 2×2, hemos obtenido todos los equilibrios de Nash mediante la representación de los conjuntos de reacción racional.

- Para juegos bimatriciales $n \times m$, hemos obtenido todos los equilibrios de Nash interiores mediante derivadas parciales.

- Para juegos bimatriciales $n \times m$, el uso de programación no lineal cuadrática a partir del algoritmo de Lemke-Howson, nos ha proporcionado todos los equilibrios de Nash.

Como vimos a lo largo del capítulo, hay juegos que tienen más de un equilibrio de Nash. Para hacer la elección del equilibrio de Nash más adecuado, se han introducido tres posibles criterios a seguir, que dependen del tipo de juego (de hecho, no son aplicables a todos los juegos). En concreto:

- Se puede buscar, si lo hay, un equilibrio de Nash estable. Este existe cuando, partiendo de una elección cualquiera de estrategias y haciendo uso sucesivo de las estrategias de mejor respuesta, siempre se termina en el mismo equilibrio de Nash.

- Se puede buscar un equilibrio de Nash que minimice el riesgo de lo que se pierde si finalmente no se alcanzara dicho equilibrio.

- Se puede elegir también, si existe, el equilibrio de Nash que produce el mayor pago a ambos jugadores.

Ni estos ni otros criterios proporcionan un método de elegir el equilibrio de Nash que sea válido para todos los casos. Sobre este tema podría profundizarse mucho más de lo que se ha hecho en este trabajo.

La teoría de juegos es muy amplia y densa. Si hubiéramos tenido algo más de espacio se podrían haber tratado otras cuestiones interesantes, además de la que acabamos de mencionar. Por ejemplo, en el capítulo 2 se podría haber introducido un método de resolución para un caso no infrecuente: cuando las matrices de pago son antisimétricas (porque el juego es simétrico para los jugadores). Este método se puede encontrar, por ejemplo, en Barron [1].

Por otro lado, en el capítulo 3, lo siguiente a tratar podría haber sido la noción y obtención de equilibrios correlados. Estos equilibrios son una generalización de los equilibrios de Nash con los que se puede obtener un mayor pago. Para lo cual se requiere que la elección de estrategias por los jugadores no sea independiente, sino que tiene que haber algún factor externo que influya en la elección de ambos. Sobre este tema también se puede consultar Barron [1] o en Laraki *et al.* [3].

En definitiva, a lo largo de estos capítulos hemos podido comprobar que la teoría de juegos deja a un lado el elegir al azar y el “tener suerte” para obtener buenos resultados. Hemos aprendido a darle el valor que le pertenece a cada situación y así, obtener la mejor respuesta y con ello el mejor pago. Como decía John Von Neumann:

> «No, no creo en la suerte, pero sí en asignar valor a las cosas».

Bibliografía

[1] Barron, E. N. *Game Theory: an introduction*. Wiley, 2013.

[2] Binmore, K. *Teoría de juegos*. McGraw-Hill, 1993.

[3] Laraki, R.; Renault, J.; Sorin, S. *Mathematical Foundations of Game Theory*. Springer, 2019.

[4] Lemke, C. E.; Howson (Jr.), J. T. Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 12 (1964), pp. 413-423.

[5] Nash, J. Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics* 54 (1951), pp. 286-295.

[6] Pérez Navarro, J.; Jimeno Pastor, J. J.; Cerdá Tena, E. *Teoría de juegos*. Garceta, 2013.

[7] Von Neumann, J. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen* 100 (1928), pp. 295-320.

[8] Von Neumann, J.; Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1966.